

UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT - PARIS 7

UFR de MATHÉMATIQUES

MÉMOIRE DE MASTER 2 MATHÉMATIQUES FONDAMENTALES :

“C*-MODULES HILBERTIENS et APPLICATIONS”

Frank Taipe

Supervisé par :
M. Georges Skandalis

Table des matières

1	Introduction	1
2	Préliminaires	1
2.1	L'algèbre d'opérateurs compacts	1
2.2	C*-algèbres	2
2.3	Stabilisation	3
2.4	Algèbre de multiplicateurs	3
3	C*-modules hilbertiens	4
3.1	Modules hilbertiens	5
3.2	Opérateurs adjointables	11
3.3	Produits tensoriels de modules hilbertiens	17
4	Le théorème de Stinespring	20
5	La théorie Ext de Kasparov	23
5.1	Extensions d'algèbres et l'invariant de Busby	24
5.2	Sommes des extensions	26
5.3	Extensions inversibles	27

1 Introduction

Les C*-modules hilbertiens sont une généralisation naturelle des espaces hilbertiens dans lesquels le corps $\mathbb{C}$ des scalaires est remplacé par une C*-algèbre. Cette généralisation, dans le cas de C*-algèbres commutatives, est apparu dans l'article [3] de I. Kaplansky ; cependant le cas non commutatif semblait trop compliqué à ce moment. La théorie générale de C*-modules hilbertiens est apparue il y a 25 ans dans les articles pionniers de W. Paschke [6] et M. Rieffel [8]. Cette théorie s'est révélée être un outil très pratique dans la théorie des algèbres d'opérateurs, permettant l'obtention d'informations sur les C*-algèbres par l'étude des C*-modules hilbertiens sur eux.

Les C*-modules hilbertiens sont cruciales pour la formulation de KK-théorie de Kasparov [4] et pour fournir un cadre approprié pour étendre la notion de Morita équivalence de C*-algèbres [9]. Ils peuvent être aussi considérés comme la généralisation des fibrés vectoriels de C*-algèbres non-commutatives. Et tels objet mathématiques jouent un rôle important dans la géométrie non commutative, notamment dans la théorie des groupes quantiques C*-algébriques [2], et C*-algèbres de groupoïdes.

Le but de ce travail est utiliser les C*-modules hilbertiens comme outil pour formuler la généralisation du théorème de Stinespring et son application dans la théorie des extensions de la forme

$$0 \rightarrow A \otimes \mathcal{K} \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0,$$

où A, B, C sont des C*-algèbre et $\mathcal{K}$ est la C*-algèbre d'opérateurs compacts sur un espace hilbertien séparable.

2 Préliminaires

2.1 L'algèbre d'opérateurs compacts

Proposition 2.1 *On suppose que $\mathcal{H}$ est un espace hilbertien. Tout opérateur d'image fini est compact ; un opérateur est compact si et seulement s'il est la limite normique d'une suite d'opérateurs continus d'image fini. Si $h \otimes \bar{k}$ note l'opérateur d'range un, $g \mapsto (g \mid k)h$, alors*

$$\mathcal{K}(\mathcal{H}) = \overline{\text{span}}\{h \otimes \bar{k} : h, k \in \mathcal{H}\}.$$

Corollaire 2.2 *L'ensemble $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ d'opérateurs compacts sur $\mathcal{H}$ est un idéal bilatère fermé de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. En particulier, $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ es une C*-sous-algèbre de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.*

Notation 2.3 Si l'espace hilbertien $\mathcal{H}$ est séparable, on note $\mathcal{K} := \mathcal{K}(\mathcal{H})$ et $\mathcal{B} := \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

2.2 C*-algèbres

Définition 2.4 Une algèbre de Banach est une algèbre A sur $\mathbb{C}$ qui est un espace de Banach par rapport à une norme qui est sous-multiplicative, i.e. $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$ pour tout $a, b \in A$.

Exemple 2.5 Si E est un espace de Banach complexe, alors l'ensemble $\mathcal{B}(E)$ de tous les opérateurs bornés sur E est une algèbre de Banach avec les opérations algébriques et norme usuelles.

Définition 2.6 Si une algèbre de Banach A est munie d'une fonction $x \mapsto x^* \in A$ avec les propriétés suivantes

- (i) $(a^*)^* = a$;
- (ii) $(a + b)^* = a^* + b^*$;
- (iii) $(\lambda a)^* = \bar{\lambda}a^*$;
- (iv) $(ab)^* = b^*a^*$;
- (v) $\|a^*\| = \|a\|$;

pour tout $a, b \in A$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, alors A est appelée une algèbre de Banach involutive et la fonction $a \mapsto a^*$ est appelée la involution (ou *-opération) de A . Si la involution de A satisfait de plus la condition suivante

$$(vi) \quad \|a^*a\| = \|a\|^2,$$

pour tout $a \in A$ (cette condition est appelée condition C*), alors A est appelé une C*-algèbre.

Exemple 2.7 Si H est un espace hilbertien complexe, alors l'algèbre de Banach $\mathcal{B}(H)$ de tous les opérateurs bornés sur H est une C*-algèbre avec l'involution $T \mapsto T^*$, où T^* est l'opérateur adjoint de T .

Proposition 2.8 Si A est une algèbre de Banach avec identité 1, alors il existe une norme $\|\cdot\|_0$ sur A tel que :

- (i) la nouvelle norme $\|\cdot\|_0$ est équivalente à la norme originale $\|\cdot\|$;
- (ii) $(A, \|\cdot\|_0)$ est une algèbre de Banach;
- (iii) $\|1\|_0 = 1$.

Preuve. Pour chaque $a \in A$, on note par L_a l'opérateur $b \in A \mapsto ab \in A$. La fonction $a \mapsto L_a$ est injective car $L_a(1) = a$. On définit $\|a\|_0 := \|L_a\|$, pour tout $a \in A$. Par l'inégalité $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$, on a $\|a\|_0 \leq \|a\|$. D'autre part, on a

$$\|a\|/\|1\| \leq \sup\{\|ab\| : \|b\| \leq 1\} = \|L_a\| = \|a\|_0.$$

Alors, la norme $\|\cdot\|_0$ est équivalente à la norme originale. Les affirmations (ii), (iii) découlent facilement de (i). $\square$

Après la proposition précédente, on va supposer toujours que la norme de l'identité est 1 si l'identité existe. Une algèbre de Banach avec identité est appelé *unitaire*.

Remarque 2.9 Si A est une algèbre de Banach involutive unitaire, alors on a $1^* = 1$. De plus, si A est une C*-algèbre unitaire, la condition $\|1\| = 1$ découle automatiquement de la condition C*.

Si une algèbre de Banach involutive A n'est pas unitaire, alors on peut plonger A dans une algèbre de Banach involutive unitaire A_1 de la manière suivante : On considère la somme directe $A \oplus \mathbb{C}$ comme l'espace vectoriel A_1 , qui est fourni avec une structure d'algèbre de Banach par

$$(a, \lambda)(b, \beta) := (ab + \beta a + \lambda b, \lambda\beta);$$

$$(a, \lambda)^* := (a^*, \bar{\lambda});$$

$$\|(a, \lambda)\| := \|a\| + |\lambda|;$$

pour tout $(a, \lambda), (b, \beta) \in A \oplus \mathbb{C}$. La fonction $a \in A \mapsto (a, 0) \in A_1$ est un isomorphisme isométrique et l'élément $(0, 1)$ est l'identité de A_1 . Si on identifie chaque $a \in A$ avec $(a, 0) \in A_1$, alors on écrit $(a, \lambda) = a + \lambda 1_{A_1}$. Avec cette identification, A est un idéal de A_1 .

Néanmoins, dans le cas où A est une C^* -algèbre, A_1 n'est pas nécessairement une C^* -algèbre. Mais, pour devenir une C^* -algèbre, on peut modifier la norme sur A_1 de la manière suivante :

Proposition 2.10 *Si une C^* -algèbre A n'est pas unitaire, alors il existe une norme sur A_1 qui fait de A_1 une C^* -algèbre.*

Preuve. Pour tout $a \in A$, et $\lambda \in \mathbb{C}$, on définit $\|a + \lambda 1_A\| := \sup\{\|ab + \lambda b\| : \|b\| \leq 1\}$. Avec cette norme définie A_1 est une C^* -algèbre. $\square$

Après la proposition précédente, si on considère une C^* -algèbre A qui n'est pas unitaire, alors A_1 notera la C^* -algèbre unitaire obtenu par le procédure précédente.

Proposition 2.11 *Pour tout $a \in A$, ils existent $b, c \in A$ tel que $a = bc$.*

2.3 Stabilisation

Définition 2.12 *Une C^* -algèbre A est dite stable si $A \otimes \mathcal{K} \simeq A$. La stabilisation d'une C^* -algèbre A est $A_S := A \otimes \mathcal{K}$.*

Proposition 2.13

1. $\mathcal{K}$ est l'adhérence de $M_\infty(\mathbb{C}) = \bigcup_{\mathbb{N}} M_n(\mathbb{C})$, c'est-à-dire $\mathcal{K} = \varinjlim M_n(\mathbb{C})$.
2. $A \otimes \mathcal{K}$ est l'adhérence de $M_\infty(A) = \bigcup_{\mathbb{N}} M_n(A)$.
3. $\mathcal{K}$ est stable, c'est-à-dire $\mathcal{K} \otimes \mathcal{K} \simeq \mathcal{K}$.
4. La stabilisation d'une C^* -algèbre est stable.
5. Si A est stable, $A \simeq M_n(A)$ pour tout n .
6. Si $\alpha: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ est une automorphisme, alors il existe un élément unitaire $U \in \mathcal{B}$ tel que $\alpha = ad(U)$, c'est-à-dire $\alpha(K) = UKU^*$ pour tout $K \in \mathcal{K}$.

$\square$

2.4 Algèbre de multiplicateurs

Définition 2.14 *Soit I un idéal non nul dans une C^* -algèbre A . On dit que I est essentiel, si pour tout idéal $J \neq 0$, on a $I \cap J \neq 0$.*

Théorème 2.15 *Soit A une C^* -algèbre. Alors, il existe une C^* -algèbre unitaire $\mathcal{M}(A)$ qui contient à A comme un idéal essentiel. Cette C^* -algèbre unitaire a la propriété universelle : Si A est un idéal dans une C^* -algèbre B , alors il existe un unique morphisme $\mu: B \rightarrow \mathcal{M}(A)$ tel que μ est l'identité dans A . De plus, μ est injectif si et seulement si A est essentiel dans B .*

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ & \searrow i & \downarrow \mu \\ & & \mathcal{M}(A) \end{array}$$

$\square$

Remarque 2.16 *Découle du théorème précédent que pour tout C^* -algèbre A , $\mathcal{M}(A)$ est unique à un isomorphisme près. La C^* -algèbre $\mathcal{M}(A)$ est appelé l'algèbre de multiplicateurs de A .*

Il y a plusieurs manières de construire $\mathcal{M}(A)$ pour prouver le théorème. On utilisera la construction de R. Busby, qui utilise les double centralisateurs o multiplicateurs.

Définition 2.17 Un double centralisateur pour une C^* -algèbre A est une couple (L, R) des fonctions $L, R: A \rightarrow A$ qui satisfait $aL(b) = R(a)b$ pour tout $a, b \in A$. L'ensemble de tous les doubles centralisateurs pour A est noté par $\mathcal{M}(A)$.

Exemple 2.18 Si I est un idéal dans une C^* -algèbre A , et $a \in A$, donc $L_a: b \mapsto ab$ et $R_a: b \mapsto ba$ sont fonctions de I vers I . Comme $b'L_a(b) = b'ab = R_a(b')b$ pour tout $b, b' \in I$, donc (L_a, R_a) est un double centralisateur pour I .

Proposition 2.19 Si (L, R) est un double centralisateur pour A , alors $L(ab) = L(a)b$ et $R(ab) = aR(b)$ pour tout $a, b \in A$. De plus, L et R sont morphismes linéaires bornés avec $\|L\| = \|R\|$.

□

Proposition 2.20 L'ensemble $\mathcal{M}(A)$ est une C^* -algèbre unitaire avec la norme et les opérations d'algèbre définie de la manière suivante

$$(L_1, R_1) + (L_2, R_2) := (L_1 + L_2, R_1 + R_2);$$

$$(L_1, R_1)(L_2, R_2) := (L_1 \circ L_2, R_1 \circ R_2);$$

$$\lambda(L, R) := (\lambda L, \lambda R), \quad \lambda \in \mathbb{C};$$

$$\|(L, R)\| := \|L\| = \|R\|.$$

Si $T: A \rightarrow A$ est une fonction, on définit $T^*: A \rightarrow A$ comme la fonction $a \mapsto (T(a^*))^*$. Alors, on a une involution sur $\mathcal{M}(A)$

$$(L, R)^* := (L^*, R^*).$$

L'élément (id_A, id_A) est l'identité de $\mathcal{M}(A)$. De plus, il existe un morphisme injectif

$$\begin{array}{ccc} i_A : A & \rightarrow & \mathcal{M}(A) \\ a & \mapsto & (L_a, R_a) \end{array}$$

□

Proposition 2.21 Soit A, B deux C^* -algèbres non unitaires et $\varphi: A \rightarrow B$ un morphisme surjectif. Alors, φ peut être étendu à un morphisme $\varphi'': \mathcal{M}(A) \rightarrow \mathcal{M}(B)$ et il induit aussi un morphisme $\varphi': \mathcal{M}(A)/A \rightarrow \mathcal{M}(B)/B$ tels que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{i_A} & \mathcal{M}(A) & \xrightarrow{\pi_A} & \mathcal{M}(A)/A \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi'' & & \downarrow \varphi' \\ B & \xrightarrow{i_B} & \mathcal{M}(B) & \xrightarrow{\pi_B} & \mathcal{M}(B)/B \end{array}$$

De plus, si φ est un isomorphisme, alors φ' et φ'' les sont aussi.

□

3 C^* -modules hilbertiens

Ici, on va décrire ses propriétés basiques des C^* -modules hilbertiens, on va aussi montrer quelques exemples très importantes. Tout au long, A note une C^* -algèbre qui n'est pas nécessairement unitaire.

3.1 Modules hilbertiens

Définition 3.1 Par un A -module à droite, on désigne un espace vectoriel X muni d'une loi externe

$$\begin{aligned} \cdot : X \times A &\rightarrow X \\ (x, a) &\mapsto x \cdot a \end{aligned}$$

qui satisfait pour tout $a, b \in A$, tout $x, y \in X$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$ les conditions suivantes

- $x \cdot (a + b) = x \cdot a + x \cdot b$,
- $(x + y) \cdot a = x \cdot a + y \cdot a$,
- $x \cdot (ab) = (x \cdot a) \cdot b$,
- $\lambda(x \cdot a) = (\lambda x) \cdot a = x \cdot (\lambda a)$.

D'une manière similaire, on peut définir un A -module à gauche X . Quelque fois, on va écrire X_A pour souligner qu'on voit l'espace vectoriel X comme un A -module à droite, et on va écrire ${}_A X$ pour souligner qu'on voit l'espace vectoriel X comme un A -module à gauche.

Remarque 3.2 Dans toute la suite, si on dit un A -module on comprendra qu'il s'agit d'un A -module à droite.

Remarque 3.3 Tout A -module à droite X est aussi un A_1 -module à droite. En effet, on peut étendre l'action de la manière suivante

$$x \cdot (a + \lambda 1_A) := x \cdot a + \lambda x,$$

pour tout $x \in X$, $a \in A$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.

Définition 3.4 Un A -module pré-hilbertien à droite est un A -module à droite X muni d'un A -produit scalaire

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_A : X \times X \rightarrow A$$

qui satisfait les conditions suivantes :

- (a) $\langle x, \lambda y + \beta z \rangle_A = \lambda \langle x, y \rangle_A + \beta \langle x, z \rangle_A$, pour tout $x, y, z \in X$ et tout $\lambda, \beta \in \mathbb{C}$;
- (b) $\langle x, y \cdot a \rangle_A = \langle x, y \rangle_A a$, pour tout $x, y \in X$ et tout $a \in A$;
- (c) $\langle x, y \rangle_A = \langle y, x \rangle_A^*$, pour tout $x, y \in X$;
- (d) $\langle x, x \rangle_A \geq 0$, pour tout $x \in X$;

Si en plus, on a $\langle x, x \rangle_A = 0$ si et seulement si $x = 0$, X est appelé un A -module pré-hilbertien séparé.

Remarque 3.5

- Les conditions (a) et (c), impliquent que $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ est antilinéaire dans la première variable. En effet, on a $\langle \lambda x + \beta y, z \rangle_A = (\lambda \langle z, x \rangle_A + \beta \langle z, y \rangle_A)^* = \overline{\lambda} \langle x, z \rangle_A + \overline{\beta} \langle y, z \rangle_A$, pour tout $x, y, z \in X$ et tout $\lambda, \beta \in \mathbb{C}$.
- De la même façon, (b) et (c), impliquent que $\langle x \cdot a, y \rangle_A = a^* \langle x, y \rangle_A$, pour tout $x, y \in X$ et tout $a \in A$.
- Pour tout $x, y \in X$, on a par sesquilinearité

$$4 \langle x, y \rangle_A = \sum_{k=0}^3 i^k \langle x + i^k y, x + i^k y \rangle_A.$$

- L'adhérence de la $*$ -algèbre $I = \text{span}\{\langle x, y \rangle_A : x, y \in X\}$ est un idéal bilatère de A .

Remarque 3.6

- D'une manière similaire, on peut définir un A -module pré-hilbertien (séparé) à gauche.
- Tout A -module pré-hilbertien (séparé) est aussi un A_1 -module pré-hilbertien (séparé).

On va montrer les deux exemples élémentaires pour fixer idées, on construira des exemples plus intéressants dans la suite.

Exemple 3.7 Les $\mathbb{C}$ -modules pré-hilbertiens séparés sont les espaces pré-hilbertiens sur $\mathbb{C}$ dans lesquels le “produit scalaire” est antilinéaire dans la première variable.

Exemple 3.8 Avec l'action de A par multiplication à droite, et le produit scalaire $\langle a, b \rangle_A := a^*b$, la C^* -algèbre A est un A -module pré-hilbertien séparé qui est noté A_A . En effet, avec la définition du produit scalaire donnée, les axiomes sont facilement vérifiés ; de plus, on a par la condition C^* de A :

$$\langle a, a \rangle_A = 0 \Leftrightarrow a^*a = 0 \Leftrightarrow \|a^*a\| = 0 \Leftrightarrow \|a\|^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0.$$

De la même manière que les espaces pré-hilbertiens, on espère qu'un A -module hilbertien soit un A -module pré-hilbertien séparé qui est complet par rapport à la norme définie par

$$\|x\|_A := \|\langle x, x \rangle_A\|^{1/2}.$$

Heureusement, cette formule définit une norme ; la preuve découle des propriétés fondamentales d'une C^* -algèbre.

Lemme 3.9 (L'inégalité de Cauchy-Schwarz) Soit X un A -module pré-hilbertien. Pour $x, y \in X$, on a

$$\langle y, x \rangle_A \langle x, y \rangle_A \leq \|\langle x, x \rangle_A\| \|\langle y, y \rangle_A\|.$$

Preuve. Soit $a := \langle x, y \rangle_A$. Pour chaque $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$0 \leq \langle x \cdot a - ty, x \cdot a - ty \rangle_A = a^* \langle x, x \rangle_A a - 2ta^*a + t^2 \langle y, y \rangle_A \leq (\|\langle x, x \rangle_A\| - 2t) a^*a + t^2 \langle y, y \rangle_A.$$

Donc, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\|\langle x, x \rangle_A\| \leq t$, on a

$$ta^*a \leq t^2 \langle y, y \rangle_A,$$

$$a^*a \leq t \langle y, y \rangle_A. \quad (1)$$

Alors, on a deux cas :

- Si $\|\langle x, x \rangle_A\| = 0$, comme on a

$$\|a\|^2 = \|a^*a\| \leq t \|\langle y, y \rangle_A\|,$$

pour tout $t > 0$, donc $\|a\| = 0$.

- Sinon, on prend $t := \|\langle x, x \rangle_A\|$. De (1),

$$\langle y, x \rangle_A \langle x, y \rangle_A \leq \|\langle x, x \rangle_A\| \|\langle y, y \rangle_A\|.$$

□

Remarque 3.10 Comme $0 \leq \langle y, x \rangle_A \langle x, y \rangle_A \leq \|\langle x, x \rangle_A\| \|\langle y, y \rangle_A\|$, donc

$$\|\langle x, y \rangle_A\|^2 = \|\langle y, x \rangle_A \langle x, y \rangle_A\| \leq \|\langle x, x \rangle_A\| \|\langle y, y \rangle_A\|.$$

Corollaire 3.11 Soit X un A -module pré-hilbertien. Pour tout $x, y \in X$,

$$\sqrt{\|\langle x+y, x+y \rangle_A\|} \leq \sqrt{\|\langle x, x \rangle_A\|} + \sqrt{\|\langle y, y \rangle_A\|}.$$

Preuve. Pour $x, y \in X$, on a

$$\begin{aligned} \|\langle x+y, x+y \rangle_A\| &= \|\langle x, x \rangle_A + \langle x, y \rangle_A + \langle y, x \rangle_A + \langle y, y \rangle_A\| \\ &\leq \|\langle x, x \rangle_A\| + \|\langle x, y \rangle_A\| + \|\langle y, x \rangle_A\| + \|\langle y, y \rangle_A\| \\ &\leq \|\langle x, x \rangle_A\| + 2\sqrt{\|\langle x, x \rangle_A\|} \sqrt{\|\langle y, y \rangle_A\|} + \|\langle y, y \rangle_A\| \\ &\leq (\sqrt{\|\langle x, x \rangle_A\|} + \sqrt{\|\langle y, y \rangle_A\|})^2. \end{aligned}$$

□

Corollaire 3.12 Si X est un A -module pré-hilbertien, alors la formule

$$\|x\|_A := \|\langle x, x \rangle_A\|^{1/2}$$

définit une semi-norme sur X . Si X est séparé, $\|\cdot\|_A$ est une norme. De plus, pour tout $x \in X$ et $a \in A$,

$$\|x \cdot a\|_A \leq \|a\| \|x\|_A. \quad (2)$$

Preuve. D'après la définition 3.4, $\|\langle \lambda x, \lambda x \rangle_A\| = |\lambda|^2 \|\langle x, x \rangle_A\|$; l'inégalité triangulaire découle du corollaire 3.11, donc $\|\cdot\|_A$ est une semi-norme. Si X est séparé, on a $\|\langle x, x \rangle_A\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$, donc $\|\cdot\|_A$ devient une norme. De plus, on a l'inégalité

$$\|x \cdot a\|_A^2 = \|\langle x \cdot a, x \cdot a \rangle_A\| = \|a^* \langle x, x \rangle_A a\| \leq \|a^*\| \|x\|_A^2 \|a\| = \|a\|^2 \|x\|_A^2.$$

□

Corollaire 3.13 Pour $x \in X$,

$$\|x\|_A = \sup\{\|\langle x, y \rangle_A\| : y \in X, \|y\|_A \leq 1\}.$$

Preuve. D'après le Remarque 3.10, pour tout $y \in X$ tel que $\|y\|_A \leq 1$,

$$\|\langle x, y \rangle_A\| \leq \|x\|_A \|y\|_A \leq \|x\|_A.$$

Si $\|x\|_A = 0$, donc $\|\langle x, y \rangle_A\| = 0$ pour tout $y \in X$ tel que $\|y\|_A \leq 1$. Sinon, comme

$$\|\langle x, \frac{x}{\|x\|_A} \rangle_A\| = \frac{\|\langle x, x \rangle_A\|}{\|x\|_A} = \|x\|_A,$$

et $\|x/\|x\|_A\|_A = 1$, on a l'égalité souhaitée.

□

Corollaire 3.14 Soit X un A -module pré-hilbertien séparé. Le A -module normé $(X_A, \|\cdot\|_A)$ est non-dégénéré en le sens que les éléments de la forme $x \cdot a$ engendrent un sous-espace dense de X , i.e.

$$X \cdot \langle X, X \rangle_A := \text{span}\{x \cdot \langle y, z \rangle_A : x, y, z \in X\}$$

est dense dans X en rapport à la norme $\|\cdot\|_A$.

Preuve. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, soit $P_n(T) \in \mathbb{R}[T]$ le polynôme $P_n(T) = 1 - (1 - T)^n$. Dès que $P_n(0) = 0$, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, donc on peut écrire $P_n(T) = TQ_n(T)$, où $Q_n(T) = Q_n(0) + S_n(T)$ et $S_n(T) \in \mathbb{R}[T]$. Découle de l'égalité $|t - tP_n(t)| = |t(1 - t)^n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0, 1]$, que la suite de fonctions $\{tP_n(t)\}_n$ converge simplement vers t sur $[0, 1]$, et en utilisant le Théorème de Dini, on a que $\{tP_n(t)\}_n$ converge uniformément vers t sur $[0, 1]$. Alors la suite de fonctions $\{U_n(t)\}$, où $U_n(T) := (1 - P_n)^2(T)T$, converge uniformément vers 0 sur $[0, 1]$. Soit $x \in X$ avec $\|x\| \leq 1$, pour chaque $n \in \mathbb{N}$ on construit

$$y_n = Q_n(0)x + x \cdot S_n(\langle x, x \rangle_A).$$

Donc, la suite $\{y_n\}$ est dans X et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \langle x, y_n \rangle_A &= \langle x, Q_n(0)x + x \cdot S_n(\langle x, x \rangle_A) \rangle_A \\ &= Q_n(0)\langle x, x \rangle_A + \langle x, x \rangle_A S_n(\langle x, x \rangle_A) \\ &= \langle x, x \rangle_A (Q_n(0) + S_n(\langle x, x \rangle_A)) \\ &= \langle x, x \rangle_A Q_n(\langle x, x \rangle_A) \\ &= P_n(\langle x, x \rangle_A). \end{aligned}$$

On affirme que la suite $\{x \cdot \langle x, y_n \rangle_A\}$ converge vers x . En effet, on a

$$\begin{aligned}
\|x - x \cdot \langle x, y_n \rangle_A\|_A^2 &= \|x \cdot (1 - P_n(\langle x, x \rangle_A))\|_A^2 \\
&= \|\langle x \cdot (1 - P_n(\langle x, x \rangle_A)), x \cdot (1 - P_n(\langle x, x \rangle_A)) \rangle_A\| \\
&= \|(1 - P_n(\langle x, x \rangle_A))\langle x, x \rangle_A(1 - P_n(\langle x, x \rangle_A))\| \\
&= \|(1 - P_n(\langle x, x \rangle_A))^2 \langle x, x \rangle_A\| \\
&= \|(1 - P_n)^2(\langle x, x \rangle_A) \langle x, x \rangle_A\| \\
&= \|U_n(\langle x, x \rangle_A)\|
\end{aligned}$$

pour chaque $n \in \mathbb{N}$. □

Remarque 3.15 Étant donné $x \in \mathbf{X}$, d'après la démonstration du Corollaire précédent, il existe une suite $\{x_n\}_n$ d'éléments de $\mathbf{X}$ associé à x , tel que $x \cdot \langle x, x_n \rangle_x \rightarrow x$.

Définition 3.16 Un A -module hilbertien est un A -module pré-hilbertien séparé $\mathbf{X}$ qui est complet par rapport à la norme $\|\cdot\|_A$. Il est appelé A -module hilbertien plein si l'idéal $I = \text{span}\{\langle x, y \rangle_A : x, y \in \mathbf{X}\}$ est dense dans A .

Si $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ sont des A -modules hilbertiens, un morphisme de modules hilbertiens de $\mathbf{X}$ vers $\mathbf{Y}$, est une transformation linéaire $\phi: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ qui respecte l'action de A , c'est-à-dire, $\phi(x \cdot a) = \phi(x) \cdot a$ pour tout $x \in \mathbf{X}$ et $a \in A$. Une autre manière de le dire est que ϕ est A -linéaire.

Remarque 3.17 Si $\mathbf{X}$ est un A -module pré-hilbertien, donc $\mathcal{N} = \{x \in \mathbf{X} : \langle x, x \rangle_A = 0\}$ est un sous- A -module de $\mathbf{X}$. Le complété séparé de $\mathbf{X}$ (le complété de $\mathbf{X}/\mathcal{N}$) est un A -module hilbertien.

Exemple 3.18 Les $\mathbb{C}$ -modules hilbertiens sont les espaces hilbertiens sur $\mathbb{C}$ dans lesquels le produit scalaire est antilinéaire dans la première variable.

Exemple 3.19 Le A -module pré-hilbertien séparé A_A est un A -module hilbertien plein. En effet, la norme dans A_A est l'usuel de la C^* -algèbre A : $\|a\|_A^2 = \|\langle a, a \rangle_A\| = \|a^*a\| = \|a\|^2$. Découle de la Proposition 2.11, qu'il est plein. En général, si I est un idéal bilatère fermé propre dans A , alors I_A est un A -module hilbertien qui n'est pas plein, car l'adhérence de $\text{span}\{\langle i, j \rangle_A : i, j \in I\}$ est I .

Exemple 3.20 Soit p un projecteur dans A . Alors $Ap := \{ap : a \in A\}$ est un pAp -module hilbertien avec produit scalaire $\langle ap, bp \rangle_A := pa^*bp$. Les propriétés algébriques sont faciles de vérifier, et la norme coïncide avec la norme usuelle sur Ap , vu comme sous-ensemble de A :

$$\|ap\|_{pAp}^2 = \|\langle ap, ap \rangle_{pAp}\| = \|pa^*ap\| = \|ap\|^2.$$

Comme Ap est un sous-espace vectoriel fermé de A , il est complet. De plus, il est plein car les produits de la forme a^*b sont denses dans A .

Exemple 3.21 Soient T un espace Hausdorff localement compact, et $\mathcal{H}$ un espace hilbertien. Alors,

$$\mathbf{X} := C_0(T, \mathcal{H}) = \{x : T \rightarrow \mathcal{H} : x \text{ est continue et } t \mapsto \|x(t)\| \in C_0(T)\},$$

est un $C_0(T)$ -module hilbertien avec les opérations

$$(x \cdot f)(t) := x(t)f(t), \quad \text{et} \quad \langle x, y \rangle_{C_0(T)}(t) := (y(t) \mid x(t)).$$

Exemple 3.22 (Somme directe) Soit $\{X_i\}_{i=1}^n$ une famille des A -modules hilbertiens. C'est un calcul facile montrer que

$$\bigoplus_{i=1}^n X_i := \{(x_i)_{i=1}^n := (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in X_i\}$$

est un A -module à droite par la action $(x_i)_{i=1}^n \cdot a := (x_i \cdot a)_{i=1}^n$, pour tout $(x_i)_{i=1}^n \in \bigoplus_{i=1}^n X_i$, et $a \in A$. On définit un produit scalaire sur $\bigoplus_{i=1}^n X_i$ de la façon suivante

$$\langle (x_i)_{i=1}^n, (y_i)_{i=1}^n \rangle_A := \sum_{i=1}^n \langle x_i, y_i \rangle_A.$$

De plus, on a

$$\|(x_i)_{i=1}^n\|_A^2 = \|\langle (x_i)_{i=1}^n, (x_i)_{i=1}^n \rangle_A\| = \left\| \sum_{i=1}^n \langle x_i, x_i \rangle_A \right\|.$$

Comme

$$0 \leq \langle x_i, x_i \rangle_A \leq \sum_{i=1}^n \langle x_i, x_i \rangle_A,$$

pour tout $(x_i)_{i=1}^n \in \bigoplus_{i=1}^n X_i$, on a

$$\|x_i\|_A^2 = \|\langle x_i, x_i \rangle_A\| \leq \left\| \sum_{i=1}^n \langle x_i, x_i \rangle_A \right\| \leq \sum_{i=1}^n \|\langle x_i, x_i \rangle_A\| = \sum_{i=1}^n \|x_i\|_A^2.$$

Alors,

$$\max\{\|x_i\|_A : i = 1, \dots, n\} \leq \|(x_i)_{i=1}^n\|_A \leq \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|_A^2 \right)^{1/2},$$

pour tout $(x_i)_{i=1}^n \in \bigoplus_{i=1}^n X_i$. Donc, $\bigoplus_{i=1}^n X_i$ est complet par rapport à la norme $\|\cdot\|_A$ puisque chaque X_i est complet par rapport à la norme $\|\cdot\|_A$. C'est-à-dire, $\bigoplus_{i=1}^n X_i$ est un A -module hilbertien. De plus, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz (Lemme 3.9) on a

$$\|\langle (x_i)_{i=1}^n, (y_i)_{i=1}^n \rangle_A\|^2 \leq \|(x_i)_{i=1}^n\|_A \|(y_i)_{i=1}^n\|_A,$$

d'où

$$\left\| \sum_{i=1}^n \langle x_i, y_i \rangle_A \right\|^2 \leq \left\| \sum_{i=1}^n \langle x_i, x_i \rangle_A \right\| \left\| \sum_{i=1}^n \langle y_i, y_i \rangle_A \right\|, \quad (3)$$

pour tout $(x_i)_{i=1}^n, (y_i)_{i=1}^n \in \bigoplus_{i=1}^n X_i$.

Si pour chaque $1 \leq i \leq n$, X_i est le même A -module hilbertien X , alors on va noter

$$X^n := \bigoplus_{i=1}^n X_i.$$

Exemple 3.23 Comme cas particulier de l'exemple précédente, la somme directe de n -copies de A_A (dénnoté par A^n) est un A -module hilbertien où

$$\langle (a_i)_{i=1}^n, (b_i)_{i=1}^n \rangle_A = \sum_{i=1}^n \langle a_i, b_i \rangle_A = \sum_{i=1}^n a_i^* b_i,$$

pour tout $(a_i)_{i=1}^n, (b_i)_{i=1}^n \in A^n$. Par l'inégalité (3) on a

$$\left\| \sum_{i=1}^n a_i^* b_i \right\|^2 \leq \left\| \sum_{i=1}^n a_i^* a_i \right\| \left\| \sum_{i=1}^n b_i^* b_i \right\|,$$

pour tout $(a_i)_{i=1}^n, (b_i)_{i=1}^n \in A^n$.

Proposition 3.24 Soit $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ une famille de A -modules hilbertiens. Alors

$$\bigoplus_{i=1}^{\infty} X_i := \left\{ \mathbf{x} = (x_i) \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i : \sum_{i=1}^{\infty} \langle x_i, x_i \rangle_A \text{ converge dans } A \right\}$$

est un A -module hilbertien avec l'action à droite

$$\mathbf{x} \cdot a := (x_i \cdot a)$$

pour $\mathbf{x} = (x_i) \in \bigoplus_{i=1}^{\infty} X_i$, $a \in A$ et le produit scalaire

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_A := \sum_{i=1}^{\infty} \langle x_i, y_i \rangle_A,$$

pour $\mathbf{x} = (x_i), \mathbf{y} = (y_i) \in \bigoplus_{i=1}^{\infty} X_i$.

Preuve. D'abord, on va montrer que ces formules sont bien définies. L'action de A sur $\bigoplus_{i=1}^{\infty} X_i$ est bien définie, en effet, pour $n \leq m$, d'après l'inégalité (2) on a

$$\|(x_i \cdot a)_{i=n}^m\|_A^2 = \|(x_i)_{i=n}^m \cdot a\|_A^2 \leq \|a\|^2 \|(x_i)_{i=n}^m\|_A^2,$$

d'où

$$\left\| \sum_{i=n}^m \langle x_i \cdot a, x_i \cdot a \rangle_A \right\| \leq \|a\|^2 \left\| \sum_{i=n}^m \langle x_i, x_i \rangle_A \right\|.$$

Comme les sommes partiales de $\sum_{i=1}^{\infty} \langle x_i, x_i \rangle_A$ sont Cauchy, on a montré que $\sum_{i=1}^{\infty} \langle x_i \cdot a, x_i \cdot a \rangle_A$ converge dans A , donc $\mathbf{x} \cdot a := (x_i \cdot a)$ appartient à $\bigoplus_{i=1}^{\infty} X_i$. Pour voir que la formule du produit scalaire est bien définie, supposons que $m \leq n$ et on utilise l'inégalité (3) pour montrer que

$$\left\| \sum_{i=n}^m \langle x_i, y_i \rangle_A \right\|^2 \leq \left\| \sum_{i=n}^m \langle x_i, x_i \rangle_A \right\| \left\| \sum_{i=n}^m \langle y_i, y_i \rangle_A \right\|.$$

Comme les sommes partiales de $\sum_{i=1}^{\infty} \langle x_i, x_i \rangle_A$ et de $\sum_{i=1}^{\infty} \langle y_i, y_i \rangle_A$ sont Cauchy, on a montré que $\sum_{i=1}^{\infty} \langle x_i, y_i \rangle_A$ converge dans A , donc $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_A$ appartient à A .

C'est un calcul facile de voir que $\bigoplus_{i=1}^{\infty} X_i$ est un A -module pré-hilbertien séparé. Démontrons qu'il est complet, on suppose que la suite $\{\mathbf{x}^n = (x_i^n)\}_n$ est de Cauchy dans $\bigoplus_{i=1}^{\infty} X_i$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $i \in \mathbb{N}$, on a

$$\|x_i^n\|_A^2 = \|\langle x_i^n, x_i^n \rangle_A\| \leq \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \langle x_j^n, x_j^n \rangle_A \right\| = \|\langle \mathbf{x}^n, \mathbf{x}^n \rangle_A\| = \|\mathbf{x}^n\|_A^2.$$

Donc, fixé $i \in \mathbb{N}$, chaque suite $\{x_i^n\}_n$ est de Cauchy dans A et il converge vers un $x_i \in A$. On va montrer que $\mathbf{x} := (x_i) \in \bigoplus_{i=1}^{\infty} X_i$ et que la suite $\{\mathbf{x}^n\}_n$ converge vers $\mathbf{x}$. Pour montrer que $\mathbf{x} \in \bigoplus_{i=1}^{\infty} X_i$, on va démontrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que si $m \geq n \geq p$ alors

$$\left\| \sum_{i=n}^m \langle x_i, x_i \rangle_A \right\| \leq \epsilon^2. \quad (4)$$

Pour chaque $\mathbf{x} = (x_i) \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ et $n \leq m$, on définit

$$\|\mathbf{x}\|_{n,m} := \left\| \sum_{i=n}^m \langle x_i, x_i \rangle_A \right\|^{1/2}.$$

De plus, si $\mathbf{x} \in \bigoplus_{i=1}^{\infty} X_i$, on a

$$\sum_{i=n}^m \langle x_i, x_i \rangle_A \leq \sum_{i=1}^{\infty} \langle x_i, x_i \rangle_A,$$

donc $\|\mathbf{x}\|_{n,m} \leq \|\mathbf{x}\|_A$ pour tout $n \leq m$.

Comme la suite $\{\mathbf{x}^n\}_n$ est de Cauchy, donné $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^l\|_A \leq \frac{\epsilon}{3},$$

pour tout $k, l \geq N$. On choisi $P \in \mathbb{N}$ tel que

$$\left\| \sum_{i=P}^{\infty} \langle x_i^N, x_i^N \rangle_A \right\|^{1/2} < \frac{\epsilon}{3}.$$

On fixe $m, n \geq P$, donc on peut trouver $M \geq N$ (M ne dépend que de m et n) tel que $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^M\|_{n,m} < \epsilon/3$. Alors

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\|_{n,m} &\leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^M\|_{n,m} + \|\mathbf{x}^M - \mathbf{x}^N\|_{n,m} + \|\mathbf{x}^N\|_{n,m} \\ &\leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^M\|_{n,m} + \|\mathbf{x}^M - \mathbf{x}^N\|_A + \left\| \sum_{i=P}^{\infty} \langle x_i^N, x_i^N \rangle_A \right\|^{1/2} \leq \epsilon \end{aligned}$$

Dés que le terme de droite de (4) est égal à $\|\mathbf{x}\|_{n,m}^2$ et comme P ne dépend que de ϵ , on a démontré que $\mathbf{x} \in \bigoplus_{i=1}^{\infty} X_i$.

Soit $\epsilon > 0$, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|\mathbf{x}^n - \mathbf{x}^m\|_A \leq \epsilon$, pour $n, m \geq N$. Alors, pour n'importe que $k \in \mathbb{N}$,

$$\left\| \sum_{i=1}^k \langle x_i^n - x_i^m, x_i^n - x_i^m \rangle_A \right\| \leq \epsilon^2,$$

et si on prend $m \rightarrow \infty$, on a

$$\left\| \sum_{i=1}^k \langle x_i^n - x_i, x_i^n - x_i \rangle_A \right\| \leq \epsilon^2, \quad (5)$$

pour tout $n \geq N$. Comme $\mathbf{x} \in \bigoplus_{i=1}^{\infty} X_i$, donc $\mathbf{x}^n - \mathbf{x} \in \bigoplus_{i=1}^{\infty} X_i$, et comme (5) est valable pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\|\mathbf{x}^n - \mathbf{x}\|_A \leq \epsilon$ pour $n \geq N$. Ceci complète la preuve. $\square$

Exemple 3.25 (Le module hilbertien standard H_A) Si on considère $X_i = A_A$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, par la Proposition précédente

$$H_A := \bigoplus_{i=1}^{\infty} A_A = \left\{ \mathbf{a} = (a_i) \in \prod_{i=1}^{\infty} A : \sum_{i=1}^{\infty} a_i^* a_i \text{ converge dans } A \right\}$$

est un A -module hilbertien, il est appelé le module hilbertien standard sur A .

3.2 Opérateurs adjointables

De la même façon que les espaces hilbertiens, nous étudions les opérateurs sur les modules hilbertiens.

Définition 3.26 Soient X et Y des A -modules hilbertiens. Une fonction $T: X \rightarrow Y$ est un opérateur adjointable, s'il existe une fonction $T^*: Y \rightarrow X$ qui satisfait la condition

$$\langle T(x), y \rangle_A = \langle x, T^*(y) \rangle_A,$$

pour tout $x \in X, y \in Y$. La fonction T^* est appelé adjoint de T .

Lemme 3.27 Si $T: X \rightarrow Y$ est adjointable, alors son adjoint est unique et adjointable avec $(T^*)^* = T$. Si $T: X \rightarrow Y$ et $S: Y \rightarrow Z$ sont adjointables, alors $S \circ T: X \rightarrow Z$ es adjointable avec $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$. De plus, si $T: X \rightarrow Y$ est adjointable, alors T et T^* sont morphismes A -linéaires bornés.

Preuve. S'il existe une autre fonction $T' : Y \rightarrow X$ tel que $\langle T(x), y \rangle_A = \langle x, T'(y) \rangle_A$, pour tout $x \in X$, $y \in Y$. Alors, $\langle x, T'(y) \rangle_A = \langle T(x), y \rangle_A = \langle x, T^*(y) \rangle_A$, pour tout $x \in X$, $y \in Y$. Comme le produit scalaire est définie positive, donc $T' = T^*$.

Si S et T sont adjointables, on a $\langle S(T(x)), z \rangle_A = \langle T(x), S^*(z) \rangle_A = \langle x, T^*(S^*(z)) \rangle_A$, pour tout $x \in X$, $z \in Z$. Alors $S \circ T$ est adjointable avec $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$.

Si $\langle T^*(y), x \rangle_A = \langle y, z \rangle_A$, pour tout $y \in X$, donc $T(x) = z$. Alors

$$G(T) := \{(x, z) : \langle T^*(y), x \rangle_A = \langle y, z \rangle_A, \text{ pour tout } y \in X\}, \quad (6)$$

est un sous-module fermé de $X \oplus Y$, donc T est A -linéaire (de la même façon T^* est A -linéaire). De plus, l'égalité (6) montre que le graphe de T (et de T^*) est fermé, donc T (et T^*) est borné. $\square$

Définition 3.28 Si X et Y sont A -modules hilbertiens, alors on va noter par $\mathcal{L}(X, Y)$ l'ensemble de tous les opérateurs adjointables de X vers Y . On note aussi $\mathcal{L}(X) := \mathcal{L}(X, X)$.

Proposition 3.29 Soient X, Y deux A -modules hilbertiens. Alors, la fonction

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \mathcal{L}(X, Y) &\rightarrow \mathbb{R} \\ T &\mapsto \sup\{\|\langle T(x), y \rangle_A\| : x \in X, y \in Y \text{ et } \|x\|_A \leq 1, \|y\|_A \leq 1\} \end{aligned}$$

est une norme pour $\mathcal{L}(X, Y)$.

Preuve. On sait, d'après le Corollaire 3.13, que pour tout $x \in X$

$$\|T(x)\|_A = \sup\{\|\langle T(x), y \rangle_A\| : y \in Y, \|y\|_A \leq 1\}.$$

Donc

$$\sup\{\|\langle T(x), y \rangle_A\| : x \in X, y \in Y \text{ et } \|x\|_A \leq 1, \|y\|_A \leq 1\} = \sup\{\|T(x)\|_A : x \in X, \|x\|_A \leq 1\}.$$

Cette dernière égalité montre que la fonction $\|\cdot\|$ est la restriction de la norme usuelle pour les opérateurs bornés sur les espaces vectoriels normés. $\square$

Remarque 3.30 D'après le Lemme 3.27, $\mathcal{L}(X)$ est une sous-algèbre de l'algèbre de Banach $\mathcal{B}(X)$. De plus, $T \mapsto T^*$ est une involution dans $\mathcal{L}(X)$.

On va montrer dans la suite, un opérateur linéaire borné sur une A -module hilbertien qui n'est pas adjointable.

Exemple 3.31 (Un morphisme linéaire borné qui n'est pas adjointable) Soient $A = C([0, 1])$ et $J = \{f \in A : f(0) = 0\}$. Or, A et J sont A -modules hilbertiens, on considère le A -module hilbertien $X := A \oplus J$, et on définit la fonction $T : X \rightarrow X$ par $T(f, g) = (g, 0)$. C'est facile de voir que T est A -linéaire et borné avec $\|T\| = 1$. De plus, si T est adjointable, en considèrent $(f, g) := T^*(1, 0)$, alors pour tout $(h, k) \in X$

$$\bar{k} = \langle T(h, k), (1, 0) \rangle_A = \langle (h, k), (f, g) \rangle_A = \bar{h}f + \bar{k}g,$$

d'où $f \equiv 0$ et $g \equiv 1$, une contradiction avec la condition $g(0) = 0$. Donc T n'est pas adjointable.

Corollaire 3.32 Soit X un A -module hilbertien. Alors, $\mathcal{L}(X)$ est une C^* -algèbre.

Preuve. Si T est adjointable, on a l'égalité

$$\|\langle T(x), y \rangle_A\| = \|\langle x, T^*(y) \rangle_A\| = \|\langle T^*(y), x \rangle_A^*\| = \|\langle T^*(y), x \rangle_A\|,$$

donc

$$\|T\| = \sup\{\|\langle T(x), y \rangle_A\| : x \in X, y \in Y \text{ et } \|x\|_A \leq 1, \|y\|_A \leq 1\} = \|T^*\|.$$

Alors, $\mathcal{L}(X)$ est une $*$ -algèbre de Banach. De plus, comme pour $x \in X$ tel que $\|x\|_A \leq 1$, on a

$$\|T(x)\|_A^2 = \|\langle T^* \circ T(x), x \rangle_A\| \leq \|T^* \circ T(x)\|_A \|x\|_A \leq \|T^* \circ T\| \|x\|_A^2 \leq \|T^* \circ T\|,$$

donc $\|T\|^2 \leq \|T^* \circ T\|$. Par ailleurs $\|T^* \circ T\| \leq \|T^*\| \|T\| = \|T\|^2$. Alors, $\mathcal{L}(X)$ est une C^* -algèbre. $\square$

Lemme 3.33 Soit X un A -module hilbertien et T un morphisme linéaire de X vers X . Alors, T est un élément positif de $\mathcal{L}(X)$ si et seulement si $\langle T(x), x \rangle_A \geq 0$ pour tout $x \in X$.

Preuve.

[$\Rightarrow$]. Si $T \geq 0$ dans $\mathcal{L}(X)$, donc $T = S^* \circ S$ pour un $S \in \mathcal{L}(X)$ et $\langle T(x), x \rangle_A = \langle S(x), S(x) \rangle_A \geq 0$ pour tout $x \in X$.

[$\Leftarrow$]. Si $\langle T(x), x \rangle_A \geq 0$ pour tout $x \in X$, donc $\langle T(x), x \rangle_A = \langle x, T(x) \rangle_A$ pour tout $x \in X$. D'après l'identité de polarisation

$$4\langle x, T(y) \rangle_A = \sum_{k=0}^3 i^k \langle x + i^k y, T(x + i^k y) \rangle_A,$$

on a que $\langle T(x), y \rangle_A = \langle x, T(y) \rangle_A$ pour tout $x, y \in X$. Alors, T est adjointable avec $T^* = T$. Du calcul fonctionnel, on peut écrire $T = S - R$ avec $S, R \geq 0$ dans $\mathcal{L}(X)$ et $R \circ S = S \circ R = 0$. Pour tout $x \in X$, on a

$$0 \leq \langle T \circ R(x), R(x) \rangle_A = -\langle R^3(x), x \rangle_A.$$

Comme $R^3 \geq 0$, $\langle R^3(x), x \rangle_A = 0$ pour tout $x \in X$, donc $R^3 = 0$ par l'identité de polarisation, d'où $R = 0$. Donc $T = S$ est positif. $\square$

Lemme 3.34 Soient les A -modules hilbertiens X_1, X_2, X_3 . Pour $x \in X_1$ et $y \in X_2$, on construit la fonction

$$\begin{aligned} \theta_{x,y} : X_2 &\rightarrow X_1 \\ z &\mapsto x \cdot \langle y, z \rangle_A \end{aligned}$$

Alors, $\theta_{x,y} \in \mathcal{L}(X_2, X_1)$ avec $\theta_{x,y}^* = \theta_{y,x}$. De plus, si $u \in X_2, v \in X_3, T \in \mathcal{L}(X_2, X_1), S \in \mathcal{L}(X_3, X_2)$, alors

$$T \circ \theta_{u,v} = \theta_{T(u),v}, \quad \theta_{x,y} \circ S = \theta_{x,S^*(y)}.$$

En particulier,

$$\theta_{x,y} \circ \theta_{u,v} = \theta_{x \cdot \langle y, u \rangle_A, v} = \theta_{x, v \cdot \langle u, y \rangle_A}.$$

Preuve. Pour $x, x' \in X_1$ et $y, y' \in X_2$, on a l'égalité

$$\langle \theta_{x,y}(y'), x' \rangle_A = \langle x \cdot \langle y, y' \rangle_A, x' \rangle_A = \langle y', y \cdot \langle x, x' \rangle_A \rangle_A = \langle y', \theta_{y,x}(x') \rangle_A.$$

De plus, pour $u \in X_2, v \in X_3, T \in \mathcal{L}(X_2, X_1), S \in \mathcal{L}(X_3, X_2)$, on a

$$T \circ \theta_{u,v}(z) = T(u \cdot \langle v, z \rangle_A) = T(u) \cdot \langle v, z \rangle_A = \theta_{T(u),v}(z),$$

et

$$\theta_{x,y} \circ S(z') = x \cdot \langle y, S(z') \rangle_A = x \cdot \langle S^*(y), z' \rangle_A = \theta_{x,S^*(y)}(z').$$

$\square$

Notation 3.35 Pour chaque couple des A -modules hilbertiens X et Y , on va noter

$$\Theta(Y, X) := \{\theta_{x,y} : x \in X, y \in Y\}.$$

On va aussi noter, $\Theta(X) := \Theta(X, X)$.

Remarque 3.36 C'est un calcul facile montrer que $\theta_{x+x',y} = \theta_{x,y} + \theta_{x',y}$ et $\theta_{x,y+y'} = \theta_{x,y} + \theta_{x,y'}$, pour tout $x, x' \in X_1$ et $y, y' \in X_2$.

Définition 3.37 L'adhérence du sous-espace vectoriel engendré par $\Theta(Y, X)$ dans $\mathcal{L}(Y, X)$ sera noté par $\mathcal{K}(Y, X)$. On note aussi $\mathcal{K}(X) := \mathcal{K}(X, X)$ et $\mathcal{K}_A := \mathcal{K}(H_A)$.

Corollaire 3.38 Pour tout A -module hilbertien X , $\mathcal{K}(X)$ est un idéal bilatère fermé dans $\mathcal{L}(X)$.

Preuve. Par le Lemme 3.34, l'ensemble $\Theta(X)$ est fermé par composition à gauche, composition à droite et involution, donc $\mathcal{K}(X)$ est un idéal bilatère. De plus, $\mathcal{K}(X)$ est fermé dans $\mathcal{L}(X)$ par définition. $\square$

Exemple 3.39 Si X est le $\mathbb{C}$ -module hilbertien $\mathcal{H}$, alors $\mathcal{L}(X) = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ et $\mathcal{K}(X) = \mathcal{K}(\mathcal{H})$.

Exemple 3.40 Si $X = A_A$. Chaque $a \in A$ définit un morphisme $L_a : A \rightarrow A$ par multiplication à gauche, i.e. $L_a(b) = ab$ pour tout $b \in A$. De plus, le morphisme L_{a^*} est l'adjoint de L_a , donc $L_a \in \mathcal{L}(A_A)$; et comme $\|L_a\| \leq \|a\|$ et $\|L_a(a^*)\| = \|a\|\|a^*\|$, on a que $\|L_a\| = \|a\|$. Alors, la fonction

$$\begin{aligned} L : A &\rightarrow \mathcal{L}(A_A) \\ a &\mapsto L_a \end{aligned}$$

est un isomorphisme de A vers un $*$ -sous-algèbre fermée de $\mathcal{L}(A_A)$. Or, $\theta_{a,b}(c) = a\langle b, c \rangle_A = ab^*c = L_{ab^*}(c)$, $\mathcal{K}(A_A)$ est l'adhérence de l'image sous L de l'enveloppe linéaire des produits dans A . Découle de la Proposition 2.11 que $A = A^2$, donc L est un isomorphisme entre A et $\mathcal{K}(A_A)$.

Soit $\{X_i\}_{i=1}^n$ une famille de A -modules hilbertiens. Pour chaque $1 \leq j \leq n$, on définit

$$\begin{aligned} U_j : X_j &\rightarrow \bigoplus_{i=1}^n X_i \\ x &\mapsto (x_i)_{i=1}^n \end{aligned}$$

où $x_i = x$ si $j = i$ et $x_i = 0$ si $i \neq j$. Comme pour tout $x \in X_j$ et $(y_i)_{i=1}^n \in \bigoplus_{i=1}^n X_i$, on a

$$\langle U_j(x), (y_i)_{i=1}^n \rangle_A = \langle x, y_j \rangle_A,$$

donc $U_j \in \mathcal{L}(X_j, \bigoplus_{i=1}^n X_i)$ avec

$$\begin{aligned} U_j^* : \bigoplus_{i=1}^n X_i &\rightarrow X_j \\ (x_i)_{i=1}^n &\mapsto x_j \end{aligned}$$

Alors, on a construit une famille de opérateurs adjointables de A -modules hilbertiens $\{U_i\}_{i=1}^n$ tel que

$$U_i^* \circ U_j = \begin{cases} id_{X_i} & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^n U_i \circ U_i^* = id_{\bigoplus_{i=1}^n X_i}.$$

Lemme 3.41 Soit $\{X_i\}_{i=1}^n$ une famille de A -modules hilbertiens. Alors

$$\mathcal{L}\left(\bigoplus_{i=1}^n X_i\right) \simeq \{(T_{i,j})_{n \times n} : T_{i,j} \in \mathcal{L}(X_j, X_i)\}$$

$$\mathcal{K}\left(\bigoplus_{i=1}^n X_i\right) \simeq \{(T_{i,j})_{n \times n} : T_{i,j} \in \mathcal{K}(X_j, X_i)\}$$

Preuve. On a les fonctions bien définies

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(\bigoplus_{i=1}^n X_i\right) &\rightarrow \{(T_{i,j})_{n \times n} : T_{i,j} \in \mathcal{L}(X_j, X_i)\} \\ T &\mapsto (U_i^* \circ T \circ U_j)_{n \times n} \end{aligned}$$

et

$$\{(T_{i,j})_{n \times n} : T_{i,j} \in \mathcal{L}(X_j, X_i)\} \rightarrow \mathcal{L}\left(\bigoplus_{i=1}^n X_i\right)$$

$$(T_{i,j})_{n \times n} \mapsto \sum_{i,j=1}^n U_i \circ T_{i,j} \circ U_j^*$$

De plus, comme

$$\sum_{i,j=1}^n U_i \circ (U_i^* \circ T \circ U_j) \circ U_j^* = \left(\sum_{i=1}^n U_i \circ U_i^* \right) \circ T \circ \left(\sum_{j=1}^n U_j \circ U_j^* \right) = T,$$

et

$$U_r^* \circ \left(\sum_{i,j=1}^n U_i \circ T_{i,j} \circ U_j^* \right) \circ U_s = \sum_{i,j=1}^n U_r^* \circ U_i \circ T_{i,j} \circ U_j^* \circ U_s = T_{r,s},$$

on obtient l'isomorphisme. D'après le Lemme 3.34, comme l'ensemble Θ est invariant par rapport à la composition à droite ou à gauche, donc le deuxième isomorphisme découle facilement du première. $\square$

Corollaire 3.42 *Si X est un A -module hilbertien, alors*

$$\mathcal{L}(X^n) \simeq M_n(\mathcal{L}(X)), \quad \mathcal{K}(X^n) \simeq M_n(\mathcal{K}(X)).$$

De plus, $\mathcal{K}(A^n) \simeq M_n(A)$ et $\mathcal{K}_A \simeq \mathcal{K} \otimes A$.

Soit X un A -module hilbertien. Pour chaque $x \in X$, on construit la fonction

$$\begin{array}{ccc} L_x : & A_A & \rightarrow & X \\ & a & \mapsto & x \cdot a \end{array}$$

Comme

$$\langle L_x(a), y \rangle_A = \langle x \cdot a, y \rangle_A = a^* \langle x, y \rangle_A = \langle a, \langle x, y \rangle_A \rangle_A,$$

pour tout $y \in X$ et $a \in A$. Donc $L_x \in \mathcal{L}(A_A, X)$ et

$$L_x^*(y) = \langle x, y \rangle_A.$$

Remarque 3.43

- Pour $x \in X$, on a

$$\|L_x\| = \|L_x^*\| = \sup\{\|\langle x, y \rangle_A\| : \|y\|_A \leq 1\} = \|x\|_A.$$

- Pour $x, x' \in X$, alors $L_{x+x'} = L_x + L_{x'}$ dans $\mathcal{L}(A_A, X)$. En effet, on a

$$L_{x+x'}(a) = (x + x') \cdot a = x \cdot a + x' \cdot a = L_x(a) + L_{x'}(a),$$

pour tout $a \in A$.

- Pour $x \in X$ et $\lambda \in C$, alors $L_{\lambda x} = \lambda L_x$ dans $\mathcal{L}(A_A, X)$. En effet, on a

$$L_{\lambda x}(a) = (\lambda x) \cdot a = \lambda x \cdot a = \lambda L_x(a),$$

pour tout $a \in A$.

- Pour $x \in X$ et $a \in A$, alors $L_{x \cdot a} = \theta_{x,a^*}$ dans $\mathcal{L}(A_A, X)$. En effet, on a

$$L_{x \cdot a}(b) = (x \cdot a) \cdot b = x \cdot (ab) = \theta_{x,a^*}(b),$$

pour tout $b \in A$.

Lemme 3.44 *Soit X un A -module hilbertien. Alors, l'application $x \mapsto L_x$ est un isomorphisme linéaire isométrique de X sur $\mathcal{K}(A_A, X)$.*

Preuve. Que la fonction L soit un morphisme linéaire isométrique, provient de la Remarque 3.43. Il reste démontrer que la fonction L est surjective. Par la Remarque 3.43, on sait que l'image de L est fermée et que $\Theta(A_A, X) \subset L(X)$. De plus, découle du Corollaire 3.14 que $L(X) \subset \mathcal{K}(A_A, X)$. Comme, $\Theta(A_A, X)$ est dense dans $\mathcal{K}(A_A, X)$, donc $L(X) = \mathcal{K}(A_A, X)$. Alors L est un isomorphisme linéaire isométrique. $\square$

Remarque 3.45 Soit le morphisme $M \in \mathcal{K}(A_A \oplus X)$ tel que $M = M^*$ et M anticommute avec $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Alors, il existe un unique $x \in X$ tel que

$$M = \begin{pmatrix} 0 & L_x^* \\ L_x & 0 \end{pmatrix}.$$

En effet, comme $M \in \mathcal{K}(A_A \oplus X)$, découle du Lemme 3.41 qu'il existe $T \in \mathcal{K}(X, A_A)$, $S \in \mathcal{K}(A_A, X)$, $R \in \mathcal{K}(X)$ et $a \in A$, tel quel $M = \begin{pmatrix} a & T \\ S & R \end{pmatrix}$. Or, $M = M^*$ et M anticommute avec $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ donc $M = \begin{pmatrix} 0 & T \\ T^* & 0 \end{pmatrix}$. D'après le Lemme 3.44, il existe un unique $x \in X$ tel que $T^* = L_x$, donc

$$M = \begin{pmatrix} 0 & L_x^* \\ L_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposition 3.46 Soit X un A -module hilbertien. Pour chaque $x \in X$, il existe un unique $y \in X$ tel que

$$x = y \cdot \langle y, y \rangle_A = \theta_{y,y}(y).$$

Preuve. Pour chaque $x \in X$, le morphisme $\begin{pmatrix} 0 & L_x^* \\ L_x & 0 \end{pmatrix}$ est autoadjoint dans $\mathcal{K}(A_A \oplus X)$. Si $f(x) = x^{1/3}$, par le calcul fonctionnel, on a que $f\left(\begin{pmatrix} 0 & L_x^* \\ L_x & 0 \end{pmatrix}\right) \in \mathcal{K}(A_A \oplus X)$ est autoadjoint et anticommute avec $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ puisque

$$\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f\left(\begin{pmatrix} 0 & L_x^* \\ L_x & 0 \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)^3 = \begin{pmatrix} 0 & L_x^* \\ L_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors, par le Remarque 3.45, il existe un unique $y \in X$ tel que $f\left(\begin{pmatrix} 0 & L_x^* \\ L_x & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & L_y^* \\ L_y & 0 \end{pmatrix}$. Comme,

$$\begin{pmatrix} 0 & L_x^* \\ L_x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & L_y^* \\ L_y & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & L_y^* \circ L_y \circ L_y^* \\ L_y \circ L_y^* \circ L_y & 0 \end{pmatrix},$$

donc $L_x^* = L_y^* \circ L_y \circ L_y^*$. Découle de l'égalité

$$\begin{aligned} \langle x, z \rangle_A = L_x^*(z) &= L_y^*(L_y(L_y^*(z))) \\ &= \langle y, y \cdot \langle y, z \rangle_A \rangle_A \\ &= \langle y, y \rangle_A \langle y, z \rangle_A \\ &= \langle y \cdot \langle y, y \rangle_A, z \rangle_A, \end{aligned}$$

pour tout $z \in X$, que $x = y \cdot \langle y, y \rangle_A$. □

Dans la suite, on va montrer une technique qui servira pour démontrer que deux A -modules hilbertiens sont isomorphes.

Lemme 3.47 Soient X, Y deux A -modules hilbertiens. S'il existe un morphisme $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ tel que $T(X)$ est dense dans Y et $T^*(Y)$ est dense dans X . Alors, X et Y sont isomorphes comme A -modules hilbertiens.

Preuve. Dès que les morphismes T et T^* sont continus d'image dense, la composition $T^* \circ T$ est d'image dense, donc le morphisme $|T| = (T^* \circ T)^{1/2}$ est d'image dense. D'un autre côté, on a

$$\langle T(x), T(y) \rangle_A = \langle x, T^* \circ T(y) \rangle_A = \langle x, |T|^2(y) \rangle_A = \langle |T|(x), |T|(y) \rangle_A$$

pour tout $x, y \in X$, donc on peut définir l'isométrie

$$u : \begin{array}{ccc} T(X) & \rightarrow & |T|(X) \\ T(x) & \mapsto & |T|(x) \end{array},$$

qui est A -linéaire dès que T et $|T|$ sont des morphismes A -linéaires. Comme T et $|T|$ sont des morphismes d'image dense, u peut être étendu à une isométrie U de Y sur X , qui est de plus A -linéaire. □

Théorème 3.48 Soit X un A -module hilbertien. Alors, la correspondance

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(X) &\rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{K}(X)) \\ T &\mapsto (T_1, T_2) \end{aligned}$$

avec $T_1(\theta_{x,y}) = \theta_{T(x),y}$ et $T_2(\theta_{x,y}) = \theta_{x,T^*(y)}$ pour tout $x, y \in X$, définit un isomorphisme entre $\mathcal{L}(X)$ et $\mathcal{M}(\mathcal{K}(X))$.

Preuve. Étant donné $T \in \mathcal{L}(X)$, d'après le Lemme 3.34, pour chaque S dans le sous-espace vectoriel engendré par $\Theta(X)$, on a $T_1(S) = T \circ S$ et $T_2(S) = S \circ T$ dans $\mathcal{L}(X)$, donc $\|T_i(S)\| \leq \|T\|\|S\|$, pour $i = 1, 2$. Alors T_1 et T_2 peuvent être étendus à opérateurs bornés sur $\mathcal{K}(X)$. De plus, c'est un calcul facile de montrer que $(T_1, T_2) \in \mathcal{M}(\mathcal{K}(X))$. Si $T_1(\theta_{u,v}) = 0$, pour tout $u, v \in X$. Alors,

$$T(x) = T(y \cdot \langle y, y \rangle_A) = T(y) \cdot \langle y, y \rangle_A = \theta_{T(y),y}(y) = T_1(\theta_{y,y})(y) = 0,$$

pour tout $x \in X$, donc $T = 0$. C'est-à-dire, la correspondance est injective.

Soit $(T_1, T_2) \in \mathcal{M}(\mathcal{K}(X))$. Étant donné $x \in X$, si $\{x_n\}_n$ note la suite associée à x , tel que $\theta_{x,x}(x_n) \rightarrow x$ (voir le Corollaire 3.15), on définit

$$T(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} T_1(\theta_{x,x})(x_n),$$

et

$$T^*(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} T_2(\theta_{x,x})^*(x_n).$$

- Étant donné $x, y \in X$, on a

$$\begin{aligned} \langle x, T^*(y) \rangle_A &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \theta_{x,x}(x_n), T_2(\theta_{y,y})^*(y_n) \rangle_A \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_2(\theta_{y,y}) \circ \theta_{x,x}(x_n), y_n \rangle_A \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \theta_{y,y} \circ T_1(\theta_{x,x})(x_n), y_n \rangle_A \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_1(\theta_{x,x})(x_n), \theta_{y,y}(y_n) \rangle_A \\ &= \langle T(x), y \rangle_A, \end{aligned}$$

donc $T \in \mathcal{L}(X)$.

- Étant donné $x, y \in X$, on a

$$T_1(\theta_{\theta_{x,x}(x_n),y})(z) = T_1(\theta_{x,x} \circ \theta_{x_n,y})(z) = T_1(\theta_{x,x}) \circ \theta_{x_n,y}(z) = T_1(\theta_{x,x})(x_n) \cdot \langle y, z \rangle_A,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in X$, donc $T_1(\theta_{x,y}) = \theta_{T(x),y}$. D'une manière similaire, $T_2(\theta_{x,y}) = \theta_{x,T^*(y)}$. $\square$

Corollaire 3.49

$$\mathcal{L}(H_A) \simeq \mathcal{M}(\mathcal{K}(H_A)).$$

3.3 Produits tensoriels de modules hilbertiens

Soit A et B deux C^* -algèbres. On considère X un A -module hilbertien, Y un B -module hilbertien, et $\phi: A \rightarrow \mathcal{L}(Y_B)$ une application complètement positive. Alors, on peut considérer le produit tensoriel algébrique de X et Y sur $\mathbb{C}$, $X \odot Y$ qui est un B -module, par l'action à droite

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \right) \cdot b := \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \cdot b,$$

et on peut aussi définir sur $X \odot Y$, une B -produit scalaire de la suivante manière

$$\left\langle \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i, \sum_{j=1}^m x'_j \otimes y'_j \right\rangle_B := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \langle y_i, \phi(\langle x_i, x'_j \rangle_A) y'_j \rangle_B.$$

En effet, on a les conditions suivantes :

•

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i, \left(\sum_{j=1}^m x'_j \otimes y'_j \right) \cdot b \right\rangle_B &= \left\langle \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i, \sum_{j=1}^m x'_j \otimes y'_j \cdot b \right\rangle_B \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \langle y_i, \phi(\langle x_i, x'_j \rangle_A) (y'_j \cdot b) \rangle_B \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \langle y_i, \phi(\langle x_i, x'_j \rangle_A) y'_j \rangle_B \right) \cdot b \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i, \sum_{j=1}^m x'_j \otimes y'_j \right\rangle_B \cdot b \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i, \sum_{j=1}^m x'_j \otimes y'_j \right\rangle_B^* &= \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \langle y_i, \phi(\langle x_i, x'_j \rangle_A) y'_j \rangle_B \right)^* \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \langle y_i, \phi(\langle x_i, x'_j \rangle_A) y'_j \rangle_B^* \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \langle y'_j, \phi(\langle x_i, x'_j \rangle_A)^* y_i \rangle_B \\ &= \left\langle \sum_{j=1}^m x'_j \otimes y'_j, \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \right\rangle_B \end{aligned}$$

- Comme la matrice $\sum_{i,j=1}^n e_{i,j} \otimes \langle x_i, x_j \rangle_A \in M_n(A)$ est positive et $1 \otimes \phi: M_n(A) \rightarrow M_n(\mathcal{L}(H_B))$ est une application positif, on a

$$\begin{aligned} \left\langle (y_k)_{k=1}^n, 1 \otimes \phi \left(\sum_{i,j=1}^n e_{i,j} \otimes \langle x_i, x_j \rangle_A \right) (y_k)_{k=1}^n \right\rangle_B &= \sum_{i,j=1}^n \langle (y_k)_{k=1}^n, e_{i,j} \otimes \phi(\langle x_i, x_j \rangle_A) ((y_k)_{k=1}^n) \rangle_B \\ &= \sum_{i,j=1}^n \langle (y_k)_{k=1}^n, (0, \dots, \phi(\langle x_i, x_j \rangle_A) y_j, \dots, 0) \rangle_B \\ &= \sum_{i,j=1}^n \langle y_i, \phi(\langle x_i, x_j \rangle_A) y_j \rangle_B \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i, \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \right\rangle_B, \end{aligned}$$

donc

$$\left\langle \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i, \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \right\rangle_B \geq 0.$$

L'ensemble

$$\mathcal{N}_{X,Y} := \{z \in X \odot Y : \langle z, z \rangle_B = 0\},$$

est un sous-espace vectoriel de $X \odot Y$, qui est invariant par l'action de B et on a la propriété $\langle x, y \rangle_B = 0$ pour tout $x \in X \odot Y$ et $y \in \mathcal{N}_{X,Y}$. Donc $X \odot Y / \mathcal{N}_{X,Y}$ est un B -module pré-hilbertien séparé avec le B -produit scalaire

$$\left\langle \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i + \mathcal{N}_{X,Y}, \sum_{j=1}^m x'_j \otimes y'_j + \mathcal{N}_{X,Y} \right\rangle_B := \left\langle \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i, \sum_{j=1}^m x'_j \otimes y'_j \right\rangle_B.$$

Le complété de $X \odot Y / \mathcal{N}_{X,Y}$ par rapport à la norme induite par ce B -produit scalaire est un B -module hilbertien, il est appelé *le produit tensoriel intérieur de X et Y* , et il sera dénoté par $X \otimes_\phi Y$. De plus, il existe une action canonique de A sur $X \odot Y$ définie de la manière suivante

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \right) \cdot a := \sum_{i=1}^n x_i \cdot a \otimes y_i;$$

d'après l'inégalité

$$\sum_{i,j=1}^n e_{i,j} \otimes \langle x_i \cdot a, x_j \cdot a \rangle_A \leq \|a\|^2 \left(\sum_{i,j=1}^n e_{i,j} \otimes \langle x_i, x_j \rangle_A \right)$$

dans $M_n(A)$ et le fait que ϕ est une application complètement positive, on a

$$\left\langle \left(\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \right) \cdot a, \left(\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \right) \cdot a \right\rangle_B \leq \|a\|^2 \left\langle \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i, \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \right\rangle_B. \quad (7)$$

Découle de l'inégalité (7) que le sous-espace vectoriel $\mathcal{N}_{X,Y}$ est invariant par A , donc on peut bien étendre l'action canonique de A sur $X \otimes_\phi Y$,

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i + \mathcal{N}_{X,Y} \right) \cdot a := \sum_{i=1}^n x_i \cdot a \otimes y_i + \mathcal{N}_{X,Y}.$$

Exemple 3.50 Soient X un A -module hilbertien, $\mathcal{H}$ un espace hilbertien. Si on considère l'application complètement positive $\phi: \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{L}(X)$, $\lambda \mapsto (\phi(\lambda)x := \lambda x)$. Alors, on construit le A -module hilbertien $\mathcal{H} \otimes_\phi X$ qui sera dénoté par $\mathcal{H} \otimes_{\mathbb{C}} X$. L'action de A est donnée par

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i h_i \otimes a_i \right) \cdot a = \sum_{i=1}^n \lambda_i h_i \otimes a_i a,$$

et le produit scalaire est donné par

$$\left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i h_i \otimes a_i, \sum_{j=1}^m \lambda'_j h'_j \otimes a'_j \right\rangle_A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_i \overline{\lambda'_j} \langle h_i | h'_j \rangle \langle a_i, a'_j \rangle_A.$$

Soient les modules hilbertiens X_A, X'_A, Y_B, Y'_B , les applications complètement positifs $\phi: A \rightarrow \mathcal{L}(Y_B)$, $\phi': A \rightarrow \mathcal{L}(Y'_B)$, et les morphismes $T \in \mathcal{L}(X_A, X'_A)$, $S \in \mathcal{L}(Y_B, Y'_B)$ tel que $\phi'(a) \circ S^* = S^* \circ \phi(a)$ pour tout $a \in A$. Si on définit la fonction

$$\begin{aligned} T \otimes S: X \otimes_\phi Y &\rightarrow X' \otimes_{\phi'} Y' \\ \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i &\mapsto \sum_{i=1}^n T(x_i) \otimes S(y_i) \end{aligned}$$

Dès qu'on a l'égalité

$$\begin{aligned}
\left\langle T \otimes S \left(\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \right), \sum_{j=1}^m x'_j \otimes y'_j \right\rangle_B &= \left\langle \sum_{i=1}^n T(x_i) \otimes S(y_i), \sum_{j=1}^m x'_j \otimes y'_j \right\rangle_B \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \langle S(y_i), \phi(\langle T(x_i), x'_j \rangle_A) y'_j \rangle_B \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \langle y_i, \phi'(\langle x_i, T^*(x'_j) \rangle_A) S^*(y'_j) \rangle_B \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i, \sum_{j=1}^m T^*(x'_j) \otimes S^*(y'_j) \right\rangle_B \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i, T^* \otimes S^* \left(\sum_{j=1}^m x'_j \otimes y'_j \right) \right\rangle_B,
\end{aligned}$$

donc $T \otimes S \in \mathcal{L}(X \otimes_\phi Y, X' \otimes_{\phi'} Y')$.

4 Le théorème de Stinespring

Définition 4.1 Un ensemble d'éléments $\{x_i\}_{i \in I}$ dans un A -module hilbertien X est appelé un système de générateurs pour X , si les sommes finies $\{\sum_k x_{i_k} \cdot a_k : a_k \in A\}$ est dense dans X . Un module hilbertien qui a un système dénombrable de générateurs est appelé dénombrablement engendré.

On va montrer une autre caractérisation du module standard H_A , en utilisant le produit tensoriel intérieur, qui sera utilisé pour démontrer le théorème de stabilisation de Kasparov.

Lemme 4.2 Soit $\mathcal{H}$ un espace hilbertien séparable de dimension infinie. Alors, le produit tensoriel intérieur $\mathcal{H} \otimes_{\mathbb{C}} A$ et H_A sont isomorphes comme A -modules hilbertiens.

Preuve. Soit $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ une base orthonormale de $\mathcal{H}$. Si $\mathcal{H}_0 := \text{span}\{e_i\}$, donc $\mathcal{H}_0 \otimes_{\mathbb{C}} A$ est dense dans $\mathcal{H} \otimes_{\mathbb{C}} A$. On définit

$$\begin{aligned}
\alpha : \quad \mathcal{H}_0 \times A &\rightarrow H_A \\
\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, a \right) &\mapsto (\lambda_1 a, \lambda_2 a, \dots, \lambda_n a, 0, \dots)
\end{aligned}$$

C'est évident que α est une transformation bilinéaire, donc il existe une transformation linéaire ψ de $\mathcal{H}_0 \otimes_{\mathbb{C}} A$ vers H_A tel que $\psi(e_i \otimes a) = \alpha(e_i, a)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ et tout $a \in A$. De plus,

$$\langle \psi(e_i \otimes a), \psi(e_j \otimes a') \rangle_A = \langle \alpha(e_i, a), \alpha(e_j, a') \rangle_A = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ \langle a, a' \rangle_A & \text{si } i = j. \end{cases}$$

$$\langle e_i \otimes a, e_j \otimes a' \rangle_A = (e_i | e_j) \langle a, a' \rangle_A = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ \langle a, a' \rangle_A & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Donc, on a les égalités

$$\begin{aligned}
\psi \left(\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \otimes a_i \right) \cdot a \right) &= \psi \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \otimes a_i a \right) = \sum_{i=1}^n \alpha(\lambda_i e_i, a_i a) \\
&= \sum_{i=1}^n \alpha(\lambda_i e_i, a_i) \cdot a = \left(\sum_{i=1}^n \psi(\lambda_i e_i \otimes a_i) \right) \cdot a \\
&= \psi \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \otimes a_i \right) \cdot a.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\langle \psi \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \otimes a_i \right), \psi \left(\sum_{j=1}^m \lambda'_j e_j \otimes a'_j \right) \right\rangle_A &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_i \overline{\lambda'_j} \langle \psi(e_i \otimes a_i), \psi(e_j \otimes a'_j) \rangle_A \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_i \overline{\lambda'_j} \langle e_i \otimes a_i, e_j \otimes a'_j \rangle_A \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \otimes a_i, \sum_{j=1}^m \lambda'_j e_j \otimes a'_j \right\rangle_A
\end{aligned}$$

C'est-à-dire, ϕ est un morphisme de A -modules hilbertiens qui préserve le produit scalaire. Soit $(a_n) \in H_A$, on a

$$\begin{aligned}
\|(a_n) - (a_1, \dots, a_k, 0, \dots)\|_A^2 &= \|(0, \dots, 0, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots)\|_A^2 \\
&= \|\langle (0, \dots, 0, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots), (0, \dots, 0, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots) \rangle_A\| \\
&= \left\| \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i^* a_i \right\|,
\end{aligned}$$

pour chaque n et chaque $k \in \mathbb{N}$. Dès que $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^* a_i$ converge dans A , donc la suite $\{(a_1, \dots, a_k, 0, \dots)\}_k$ converge vers (a_n) dans H_A . Comme

$$(a_1, \dots, a_k, 0, \dots) = \psi \left(\sum_{i=1}^k e_i \otimes a_i \right),$$

donc (a_n) appartient à la clôture de l'image de ψ . Alors, ψ est d'image dense, donc on peut l'étendre à un isomorphisme de A -modules hilbertiens entre $\mathcal{H} \otimes_{\mathbb{C}} A$ et H_A . $\square$

Remarque 4.3 Soit A une C^* -algèbre qui n'est pas unitaire. On identifie H_A avec $\mathcal{H} \otimes_{\mathbb{C}} A$ et H_{A_1} avec $\mathcal{H} \otimes_{\mathbb{C}} A_1$. Si i note l'inclusion de A dans A_1 , donc $1_{\mathcal{H}} \otimes i: H_A \rightarrow H_{A_1}$ est un morphisme isométrique de modules hilbertiens et son image est $H_{A_1} \cdot \bar{A}$, puisque $h \otimes a = (h \otimes 1_{A_1}) \cdot a$ dans H_{A_1} . Alors H_A est isomorphe à $H_{A_1} \cdot \bar{A}$ comme modules hilbertiens.

De plus, si X est un A -module hilbertien, on peut voir X comme un A_1 -module hilbertien et obtenir un morphisme isométrique $1_X \oplus (1_{\mathcal{H}} \otimes i): X \oplus H_A \rightarrow X \oplus H_{A_1}$ avec image $(X \oplus H_{A_1}) \cdot \bar{A}$ puisque $X \cdot \bar{A} = X$. Alors $X \oplus H_A$ est isomorphe à $(X \oplus H_{A_1}) \cdot \bar{A}$ comme modules hilbertiens.

Théorème 4.4 (Stabilisation de Kasparov) Soit X un A -module hilbertien dénombrablement engendré, alors

$$X \oplus H_A \simeq H_A,$$

comme A -modules hilbertiens.

Preuve. D'abord, si $u: \overline{H_{A_1}} \rightarrow X \oplus H_{A_1}$ est un isomorphisme de A -modules hilbertiens, on peut obtenir un isomorphisme de $\overline{H_{A_1}} \cdot A$ sur $(X \oplus H_{A_1}) \cdot A$. D'après la Remarque 4.3, on obtient un isomorphisme entre $X \oplus H_A$ et H_A . Alors, on peut supposer toujours que A est unitaire.

Comme X est dénombrablement engendré, donc on peut choisir un système dénombrable de générateurs $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tel que pour chaque $m \in \mathbb{N}$ il existe une infinité de x_n tel que $x_n = x_m$. D'après le Lemme précédent, on voit $H_A = \mathcal{H} \otimes_{\mathbb{C}} A$, où $\mathcal{H}$ est un espace hilbertien séparable de dimension infinie. Si $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une base orthonormale de $\mathcal{H}$, donc c'évident que $\{e_n := h_n \otimes 1_A\}_{n \in \mathbb{N}}$ est un système dénombrablement engendré pour H_A et que $\langle e_n, e_m \rangle_A = \delta_{n,m} 1_A$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$y_n := (2^{-n} x_n, 4^{-n} e_n) \in X \oplus H_A,$$

donc

$$T := \sum_{i=1}^{\infty} \theta_{y_i, e_i}$$

appartient à $\mathcal{K}(H_A, X \oplus H_A)$. On a

$$\begin{aligned} T(e_n) &= \sum_{i=1}^{\infty} \theta_{y_i, e_i}(e_n) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} y_i \cdot \langle e_i, e_n \rangle_A \\ &= 2^{-n}(x_n, 0) + 4^{-n}(0, e_n) \end{aligned}$$

et si $x_m = x_n$, donc

$$T(2^m e_m) = (x_n, 0) + 2^{-m}(0, e_m).$$

Puisqu'on a supposé qu'il y a une infinité de m tel que $x_m = x_n$, on a que $(x_n, 0)$ appartient à l'adhérence de $T(H_A)$ et comme

$$(0, e_n) = T(4^n e_n) - 2^n(x_n, 0),$$

donc $(0, e_n)$ appartient aussi à l'adhérence de $T(H_A)$. Alors $\overline{T(H_A)} = X \oplus H_A$. De plus,

$$T^* = \sum_{i=1}^{\infty} \theta_{e_i, y_i},$$

donc on a $T(4^n e_n) = (0, e_n)$, d'où $\overline{T^*(X \oplus H_A)} = H_A$. D'après le Lemme 3.47, on a fini la preuve. $\square$

Théorème 4.5 (Stinespring) *On suppose que la C^* -algèbre A est séparable, la C^* -algèbre B a des unités approchées dénombrables. Soit $\phi: A \rightarrow \mathcal{L}(H_B)$ une application complètement positive, alors*

- 1) *Il existe un $*$ -homomorphisme $\pi: A \rightarrow \mathcal{L}(H_B)$ et un élément $V \in \mathcal{L}(H_B)$ avec la propriété,*

$$\phi(a) = V^* \circ \pi(a) \circ V,$$

pour tout $a \in A$. Si A est unitaire, alors π peut être choisi unifié.

- 2) *Si A est unitaire et ϕ est unifié, il existe un homomorphisme unifié*

$$\sigma: A \rightarrow \mathcal{L}(H_B \oplus H_B)$$

tel que pour tout $a \in A$, $\phi(a) \oplus 0 = q \circ \sigma(a) \circ q$, où $q \in \mathcal{L}(H_B \oplus H_B)$ est la projection sur le premier facteur directe. Si la C^ -algèbre A est non unitaire, alors ce reste valide si $\|\phi\| \leq 1$.*

Preuve. D'abord, on considère que A est unitaire. On prend le B -module hilbertien $E := A \otimes_{\phi} H_B$ et on définit le $*$ -homomorphisme unifié $\pi': A \rightarrow \mathcal{L}(E)$ comme l'action canonique de A sur E . On définit les fonctions

$$\begin{aligned} W: H_B &\rightarrow E \\ x &\mapsto 1 \otimes x + \mathcal{N}_{A, H_B} \end{aligned} ,$$

$$W^* : \begin{array}{ccc} A \odot H_B & \rightarrow & H_B \\ \sum_{i=1}^n a_i \otimes \mathbf{x}_i & \mapsto & \sum_{i=1}^n \phi(a_i) \mathbf{x}_i \end{array} ,$$

Comme l'application $\phi' = 1 \otimes \phi : M_n(A) \rightarrow M_n(\mathcal{L}(H_B))$ est positif, donc $\phi'(a^*)\phi'(a) \leq \|\phi'(1)\|\phi'(a^*a)$ et on a l'inégalité

$$\left\| W^* \left(\sum_{i=1}^n a_i \otimes \mathbf{x}_i \right) \right\|_B^2 \leq \left\| \sum_{i,j=1}^n \langle \mathbf{x}_i, \phi(a_i^*)\phi(a_j)\mathbf{x}_j \rangle_B \right\| \leq \|\phi(1)\| \left\| \left\langle \sum_{i=1}^n a_i \otimes \mathbf{x}_i, \sum_{i=1}^n a_i \otimes \mathbf{x}_i \right\rangle_B \right\|.$$

Donc $W^*(\mathcal{N}_{A,H_B}) = 0$, et W^* peut être étendu à un morphisme sur E par continuité. D'après les égalités

$$\begin{aligned} \left\langle W(\mathbf{x}), \sum_{i=1}^n a_i \otimes \mathbf{y}_i + \mathcal{N}_{A,H_B} \right\rangle_B &= \left\langle 1 \otimes \mathbf{x} + \mathcal{N}_{A,H_B}, \sum_{i=1}^n a_i \otimes \mathbf{y}_i + \mathcal{N}_{A,H_B} \right\rangle_B \\ &= \left\langle \mathbf{x}, \sum_{i=1}^n \phi(a_i) \mathbf{y}_i \right\rangle_B \\ &= \left\langle \mathbf{x}, W^* \left(\sum_{i=1}^n a_i \otimes \mathbf{y}_i + \mathcal{N}_{A,H_B} \right) \right\rangle_B, \end{aligned}$$

$$W^* \circ \pi'(a) \circ W(\mathbf{x}) = W^*(a \otimes \mathbf{x} + \mathcal{N}_{A,H_B}) = \phi(a)\mathbf{x},$$

on a $W \in \mathcal{L}(H_B, E)$ et $W^* \circ \pi'(a) \circ W = \phi(a)$.

Soit $\pi_0 : A \rightarrow \mathcal{L}(H)$ une *-homomorphisme quelconque (e.g. une représentation de A), en utilisant l'identification $H_B = H \otimes_{\mathbb{C}} B$, on peut construire le *-homomorphisme

$$\pi'' : \begin{array}{ccc} A & \rightarrow & \mathcal{L}(H_B) \\ a & \mapsto & \pi_0(a) \otimes id_B \end{array} ,$$

On prend le *-homomorphisme $\pi = \pi' \oplus \pi'' : A \rightarrow \mathcal{L}(E \oplus H_B)$ et les morphismes canoniques $i : E \rightarrow E \oplus H_B$, $j : E \oplus H_B \rightarrow E$, si on pose $V := i \circ W$ et $V^* := W^* \circ j$, en utilisant l'identification $E \oplus H_B \simeq H_B$, on a $V \in \mathcal{L}(H_B)$ et

$$V^* \circ \pi(a) \circ V = W^* \circ j \circ \pi(a) \circ i \circ W = W^* \circ \pi'(a) \circ W = \phi(a),$$

pour tout $a \in A$.

Si $\phi(1) = 1$, donc $W^* \circ W = 1$ et $W \circ W^*$ est une projection. Donc,

$$E \simeq Im(W \circ W^*) \oplus Im(1 - W \circ W^*) \simeq H_B \oplus E',$$

et

$$E \oplus H_B \simeq H_B \oplus (E' \oplus H_B) \simeq H_B \oplus H_B.$$

D'après cet identification V devient l'inclusion $H_B \oplus 0 \subset H_B \oplus H_B$ et V^* devient la projection de $H_B \oplus H_B$ sur le première facteur directe.

Dans le cas non-unitaire, si $\phi : A \rightarrow \mathcal{L}(H_B)$ est une application complètement positive tel que $\|\phi\| \leq 1$, donc on peut étendre ϕ à une application complètement positive $\tilde{\phi} : A_1 \rightarrow \mathcal{L}(H_B)$, et on revient au le cas unitaire. $\square$

5 La théorie Ext de Kasparov

Dans la suite, on appellera simplement algèbres aux C*-algèbres.

5.1 Extensions d'algèbres et l'invariant de Busby

Définition 5.1 Soient A et C deux algèbres. Par une extension $E = (\alpha, B, \beta)$ de C par A , on veut dire une algèbre B avec morphismes α et β tel que la suite courte ci-dessous

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

est exacte. L'ensemble de tous les extensions de C par A sera dénoté $\text{Ext}(C, A)$. L'extension E est appelé trivial, si la suite exacte courte est scindée, i.e. il existe un morphisme $\gamma: C \rightarrow B$ tel que $\beta \circ \gamma = \text{id}_C$; E est appelé essentielle si $\alpha(A)$ est un idéal essentiel dans B .

Lemme 5.2 Soit $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$ une suite exacte courte. Alors, il existe un unique morphisme $\sigma: B \rightarrow \mathcal{M}(A)$ tel qu'on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & B \\ & \searrow i_A & \downarrow \sigma \\ & & \mathcal{M}(A) \end{array}$$

Preuve. Comme $\alpha(A)$ est un idéal dans B , par le Théorème 2.15, on peut obtenir un unique morphisme $\mu: B \rightarrow \mathcal{M}(\alpha(A))$ tel que $\mu|_{\alpha(A)} = i_{\alpha(A)}$. Si α' est l'extension de α à un isomorphisme entre $\mathcal{M}(A)$ et $\mathcal{M}(\alpha(A))$, en prenant $\sigma = \alpha'^{-1} \circ \mu$, on a $\sigma \circ \alpha = i_A$.

Si $\phi: B \rightarrow \mathcal{M}(A)$ est autre morphisme tel que $\phi \circ \alpha = i_A$, le morphisme $\alpha' \circ \phi$ est l'identité dans $\alpha(A)$ et par le théorème 2.15, il est égal à μ dans tout B . Donc $\phi = \alpha'^{-1} \circ \mu = \sigma$. $\square$

Dans la suite, soit $E = (\alpha, B, \beta)$ une extension de C par A .

Définition 5.3 On définit l'invariant de Busby de E comme le morphisme

$$\begin{aligned} \tau_E : C &\rightarrow \mathcal{M}(A)/A \\ c &\mapsto \pi_A \circ \sigma(b), \end{aligned}$$

où $b \in B$ tel que $\beta(b) = c$, et $\pi_A: \mathcal{M}(A) \rightarrow \mathcal{M}(A)/A$ est le morphisme canonique.

Remarque 5.4 Le morphisme τ_E est bien défini. En effet, si on a $b_1, b_2 \in B$ tel que $\beta(b_1) = \beta(b_2) = c$, donc il existe $a \in A$ tel que $b_1 - b_2 = \alpha(a)$. Alors $\pi_A \circ \sigma(b_1 - b_2) = \pi_A \circ \sigma \circ \alpha(a) = \pi_A \circ i_A(a) = 0$.

Proposition 5.5 L'invariant de Busby de E est l'unique morphisme qui fait le diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & C \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \sigma & & \downarrow \tau_E \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i_A} & \mathcal{M}(A) & \xrightarrow{\pi_A} & \mathcal{M}(A)/A \longrightarrow 0 \end{array}$$

Preuve. Il découle de la définition précédente. $\square$

De manière réciproque, on va partir d'un morphisme de C vers $\mathcal{M}(A)/A$, et on va trouver une extension de C par A . On utilisera la définition suivante :

Définition 5.6 Un pullback de l'algèbre C par les morphismes $\alpha_1: A_1 \rightarrow C$ et $\alpha_2: A_2 \rightarrow C$, est la sous-algèbre de $A_1 \oplus A_2$ définie par

$$PB(C, \alpha_1, \alpha_2) := \{(a_1, a_2) \in A_1 \oplus A_2 : \alpha_1(a_1) = \alpha_2(a_2)\}.$$

Pour $i = 1, 2$, on a les morphismes

$$\begin{aligned} \beta_i : PB(C, \alpha_1, \alpha_2) &\rightarrow A_i \\ (a_1, a_2) &\mapsto a_i \end{aligned}$$

Proposition 5.7 Si D est une algèbre avec morphismes $\delta_i: D \rightarrow A_i$ pour $i = 1, 2$ qui satisfont $\alpha_1 \circ \delta_1 = \alpha_2 \circ \delta_2$, alors il existe un unique morphisme $\Delta_D: D \rightarrow PB := PB(C, \alpha_1, \alpha_2)$ qui fait le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 D & & \xrightarrow{\delta_2} & & A_2 \\
 & \searrow \Delta_D & & \nearrow \beta_1 & \\
 & & PB & & \\
 & \nearrow \beta_1 & & \searrow \alpha_2 & \\
 A_1 & & \xrightarrow{\alpha_1} & & C
 \end{array}$$

commutatif.

Proposition 5.8 Soit τ un morphisme de l'algèbre C vers l'algèbre $\mathcal{M}(A)/A$, et soit PB le pullback de $\mathcal{M}(A)/A$ par π_A et τ ,

$$\begin{array}{ccc}
 PB & \xrightarrow{\quad} & C \\
 \downarrow & & \downarrow \tau \\
 \mathcal{M}(A) & \xrightarrow{\pi_A} & \mathcal{M}(A)/A
 \end{array}$$

Alors, avec les morphismes canoniques

$$\begin{aligned}
 \alpha' : A &\rightarrow PB \\
 a &\mapsto (i_A(a), 0) \\
 \beta' : PB &\rightarrow C \\
 (m, c) &\mapsto c
 \end{aligned}$$

on peut construire la suite exacte

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha'} PB \xrightarrow{\beta'} C \longrightarrow 0$$

qui a comme l'invariant de Busby à τ .

Preuve. El pullback est $PB = \{(m, c) \in \mathcal{M}(A) \oplus C : \pi_A(m) = \tau(c)\}$, donc α et β sont bien définis et $\text{Ker} \beta = \{(m, c) \in PB : c = 0\} = A \oplus 0 = \alpha(A)$. De plus α est injectif, et β est surjectif (car π_A est surjectif).

Si $\theta: Pb \rightarrow \mathcal{M}(A)$ est le morphisme $(m, c) \mapsto m$, on a $\theta \circ \alpha = i_A$. Comme $\tau_E(\beta(m, c)) = \pi_A \circ \theta(m, c) = \pi_A(m) = \tau(c) = \tau(\beta(m, c))$, alors $\tau_E = \tau$. $\square$

Remarque 5.9 On vient de construire une application

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Ext}(C, A) & \rightarrow & \text{Hom}(C, \mathcal{M}(A)/A) \\
 E & \mapsto & \tau_E
 \end{array}$$

qui est surjective. Dans la suite, on va déterminer une relation dans l'ensemble des extensions de C par A qui fait l'application précédente soit injective.

Proposition 5.10 Il existe un isomorphisme ψ entre B et le pullback PB de $\mathcal{M}(A)/A$ par π_A et τ_E qui fait le suivant diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & C \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow \psi & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\alpha'} & PB & \xrightarrow{\beta'} & C \longrightarrow 0
 \end{array}$$

commutatif.

Preuve. Par définition de τ_E , $\pi_A \circ \sigma(b) = \tau_E \circ \beta(b)$ pour tout $b \in B$ donc on pose

$$\begin{aligned} \psi : B &\rightarrow PB \\ b &\mapsto (\sigma(b), \beta(b)) \end{aligned}$$

Comme $\psi \circ \alpha(a) = (\sigma \circ \alpha(a), 0) = (i_A(a), 0) = \alpha'(a)$ et $\beta' \circ \psi(b) = \beta'(\sigma(b), \beta(b)) = \beta(b)$, donc ψ fait le diagramme commutatif.

Si $0 = \psi(b)$, $b \in \text{Ker} \beta$ donc il existe $a \in A$ tel que $b = \alpha(a)$. Comme $\sigma \circ \alpha = i_A$, on a $0 = \sigma(b) = \sigma \circ \alpha(a) = a$, donc $b = \alpha(a) = 0$.

Soit $(m, c) \in PB$. Comme β est surjectif, il existe $b_0 \in B$ tel que $\beta(b_0) = c$; si on pose $x := \sigma(b_0) - m \in \mathcal{M}(A)$, donc $\pi_A(\sigma(b_0) - m) = \tau_E \circ \beta(b_0) - \pi_A(m) = \tau_E(c) - \pi_A(m) = 0$, c'est-à-dire $x \in A$. Alors, si $b = b_0 - \alpha(x)$, on a $\sigma(b) = \sigma(b_0) - x = m$ et $\psi(b) = (\sigma(b), \beta(b)) = (m, c)$. $\square$

Corollaire 5.11 Soient $E_1 = (\alpha_1, B_1, \beta_1)$, $E_2 = (\alpha_2, B_2, \beta_2)$ deux extensions de C par A dont les invariants de Busby sont τ_{E_1}, τ_{E_2} respectivement. Alors $\tau_1 = \tau_2$ si et seulement s'il existe un isomorphisme ψ qui fait le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\alpha_1} & B_1 & \xrightarrow{\beta_1} & C \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \psi & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\alpha_2} & B_2 & \xrightarrow{\beta_2} & C \longrightarrow 0 \end{array}$$

commutatif.

Preuve. On suppose $\tau_1 = \tau_2$. Si PB est le pullback de $\mathcal{M}(A)/A$ par π_A et $\tau_1 = \tau_2$ et $\psi_i : B_i \rightarrow PB$ ($i = 1, 2$) les isomorphismes qu'on trouve par la Proposition 5.10. Alors, le isomorphisme $\psi := \psi_2^{-1} \circ \psi_1$ est le morphisme qu'on cherche.

Réciproquement, soient σ_1, σ_2 les uniques morphismes tels que $\sigma_1 \circ \alpha_1 = \sigma_2 \circ \alpha_2 = i_A$, comme on a $\sigma_1 \circ \psi^{-1} \circ \alpha_2 = \sigma_1 \circ \alpha_1 = i_A$ donc $\sigma_1 = \sigma_2 \circ \psi$. Donnée $c \in C$, soit $b_1 \in B_1$ tel que $\beta_1(b_1) = c$, dès que $\beta_2(\psi(b_1)) = \beta_1(b_1) = c$ donc $\tau_1(c) = \pi_A \circ \sigma_1(b_1) = \pi_A \circ \sigma_2(\psi(b_1)) = \tau_2(c)$. $\square$

Définition 5.12 Deux extensions qui satisfont le Corollaire 5.11 sont appelés fortement isomorphes. On note $E_1 \equiv E_2$, si E_1 et E_2 sont fortement isomorphes, et $\text{Ext}_{\equiv}(C, A)$ à l'ensemble de classes d'équivalence pour la relation fortement isomorphes dans les extensions de C par A .

Proposition 5.13

1. E est essentiel si et seulement si le morphisme τ_E est injectif.
2. E est trivial si et seulement s'il existe un morphisme $\eta : C \rightarrow \mathcal{M}(A)$ tel que $\tau_E = \pi \circ \eta$,

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & C \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \omega & \nearrow \eta & \downarrow \tau_E \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i_A} & \mathcal{M}(A) & \xrightarrow{\pi_A} & \mathcal{M}(A)/A \longrightarrow 0 \end{array}$$

3. $\tau_E = 0$ si et seulement si B est isomorphe à $A \oplus C$.

Preuve. Voir [11] $\square$

5.2 Sommes des extensions

Soient A et C deux algèbres.

Définition 5.14 Soient $E_1 = (\alpha_1, B_1, \beta_1), E_2 = (\alpha_2, B_2, \beta_2) \in \text{Ext}(C, A)$ dont les invariants de Busby sont τ_{E_1}, τ_{E_2} respectivement. On dit que E_1 et E_2 sont fortement équivalents, et il sera noté par $\tau_{E_1} \approx \tau_{E_2}$, s'il existe un élément unitaire $u \in \mathcal{M}(A)$ tel que $\tau_2(c) = \pi_A(u)\tau_1(c)\pi_A(u)^*$ pour tout $c \in C$. On va noter par $\text{Ext}_{\approx}(C, A)$, l'ensemble de classes d'équivalence par la relation fortement équivalent dans les extensions de C par A .

Remarque 5.15 Évidemment, la condition d'être fortement équivalent implique celle d'être fortement isomorphe.

Définition 5.16 Soit $\phi: \mathcal{K} \otimes M_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{K}$ un isomorphisme quelconque. Le morphisme

$$S_\phi: A \otimes (\mathcal{K} \otimes M_2(\mathbb{C})) \rightarrow A \otimes \mathcal{K}$$

défini par $S_\phi := 1 \otimes \phi$ est appelé un isomorphisme standard pour ϕ de $M_2(A \otimes \mathcal{K})$ vers $A \otimes \mathcal{K}$. On va aussi noter par S_ϕ aux isomorphismes $M_2(\mathcal{M}(A \otimes \mathcal{K})) \rightarrow \mathcal{M}(A \otimes \mathcal{K})$ et $M_2(\mathcal{M}(A \otimes \mathcal{K})/A \otimes \mathcal{K}) \rightarrow \mathcal{M}(A \otimes \mathcal{K})/A \otimes \mathcal{K}$ qui sont induits par S_ϕ et la Proposition 2.21.

Proposition 5.17 Soit S_ϕ, S_ψ deux morphismes standards de $M_2(A \otimes \mathcal{K})$ vers $A \otimes \mathcal{K}$. Il existe un élément $u \in \mathcal{M}(A \otimes \mathcal{K})$ tel que l'automorphisme $S_\phi \circ S_\psi^{-1}: A \otimes \mathcal{K} \rightarrow A \otimes \mathcal{K}$ est $\text{ad}(u)$.

Preuve. Par définition, $S_\phi \circ S_\psi^{-1} = 1 \otimes \phi \circ \psi^{-1}$. Dès que $\phi \circ \psi^{-1}$ est un automorphisme de $\mathcal{K}$, par la Proposition 2.13, il existe un élément unitaire $U \in \mathcal{B}$ tel que $\phi \circ \psi^{-1} = \text{ad}U$. Si on pose $u := 1 \otimes U \in \mathcal{M}(A) \otimes B \subset \mathcal{M}(A \otimes \mathcal{K})$, on a $S_\phi \circ S_\psi^{-1} = \text{ad}(u)$. $\square$

Corollaire 5.18 Soient x_1 et x_2 dans $\text{Ext}_{\approx}(C, A \otimes \mathcal{K})$. Si E_1 et E_2 sont les extensions représentants de x_1 et x_2 respectivement, dont

$$\tau_i: C \rightarrow \mathcal{M}(A \otimes \mathcal{K})/A \otimes \mathcal{K}$$

sont ses invariants de Busby, alors l'application

$$C \xrightarrow{\tau_1 \oplus \tau_2} \mathcal{M}(A^s)/A^s \hookrightarrow M_2(\mathcal{M}(A^s)/A^s) \xrightarrow{S_\phi} \mathcal{M}(A^s)/A^s$$

définit une extension de C par $A \otimes \mathcal{K}$ et son $\approx$ -classe d'équivalence est indépendante du choix des représentants E_1 et E_2 et de l'isomorphisme $S_\phi: M_2(A \otimes \mathcal{K}) \rightarrow A \otimes \mathcal{K}$. La $\approx$ -classe d'équivalence qui contient cette extension est appelée la somme de x_1 et x_2 , et elle sera notée par $x_1 \oplus x_2$.

Proposition 5.19 L'ensemble $\text{Ext}_{\approx}(C, A \otimes \mathcal{K})$ est fermé par la somme définie dans le corollaire précédent. La somme des extensions définie est associatif et commutatif.

Proposition 5.20 L'ensemble des extensions triviaux de $\text{Ext}_{\approx}(C, A \otimes \mathcal{K})$ est fermé par la somme des extensions. Le quotient de $\text{Ext}_{\approx}(C, A \otimes \mathcal{K})$ par l'ensemble des extensions triviaux est un demi-groupe commutatif noté par $\mathbf{Ext}(C, A \otimes \mathcal{K})$.

Remarque 5.21 Si τ_1 et τ_2 sont deux extensions de C par $A \otimes \mathcal{K}$, alors τ_1 et τ_2 sont égaux dans $\mathbf{Ext}(C, A \otimes \mathcal{K})$ si et seulement s'il existent des extensions triviaux τ'_1 et τ'_2 tel que $\tau_1 \oplus \tau'_1$ est $\tau_2 \oplus \tau'_2$ sont fortement équivalent.

5.3 Extensions inversibles

Théorème 5.22 Si C est separable et A a des unités approchées dénombrables. Alors une extension $\tau: C \rightarrow \mathcal{M}(A \otimes \mathcal{K})/A \otimes \mathcal{K}$ est un élément inversible de $\mathbf{Ext}(C, A \otimes \mathcal{K})$ si et seulement s'il existe une application complètement positive $\nu: C \rightarrow \mathcal{M}(A \otimes \mathcal{K})$ tel que $\pi_A \circ \nu = \tau$.

Preuve. On utilise le Théorème de Stinespring. $\square$

Définition 5.23 Une extension

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

est dite demi-scindée s'il existe une application complètement positive $\gamma: C \rightarrow B$ tel que $\beta \circ \gamma = \text{id}_C$.

Corollaire 5.24 Si C est separable et A a des unités approchées dénombrables. Une extension τ de C par $A \otimes \mathcal{K}$ est un élément inversible de $\mathbf{Ext}(C, A \otimes \mathcal{K})$ si et seulement s'il existe une extension trivial τ' tel que $\tau \oplus \tau'$ est semi-scindée.

Références

- [1] ARVERSON, W. *An Invitation to C^* -Algebras*. Springer-Verlag, 1976.
- [2] BAAJ, S., AND SKANDALIS, G. Unitaires multiplicatifs et dualité pour les produits croisés de C^* -algèbres. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure* (1993), 425–488.
- [3] KAPLANSKY, I. Modules Over Operator Algebras. *American Journal of Mathematics* 75, 4 (Oct. 1953), 839–858.
- [4] KASPAROV, G. G. Hilbert C^* -modules : Theorems of Stinespring and Voiculescu. *Journal of Operator Theory* (1980), 133–150.
- [5] MURPHY, G. J. *C^* -Algebras and Operator Theory*. Academic Press, INC., 1990.
- [6] PASCHKE, W. L. Inner Product Modules Over B^* -Algebras. *Transactions of the American Mathematical Society* 182 (Aug. 1973), 443–468.
- [7] RAEBURN, I., AND WILLIAMS, D. P. *Morita Equivalence and Continuous-Trace C^* -Algebras*, vol. 60 of *Mathematical surveys and monographs*. American Mathematical Society, 1998.
- [8] RIEFFEL, M. A. Induced Representations of C^* -Algebras. *Advances in Mathematics* (1974), 176–257.
- [9] RIEFFEL, M. A. Morita Equivalence for Operator Algebras. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics* (1982), 176–257.
- [10] TAKESAKI, M. *Theory of Operators algebras I*, vol. 124 of *Encyclopaedia Subseries on Operator Algebras and Non-Commutative Geometry*. Springer, 2001.
- [11] WEGGE-OLSEN, N. E. *K - Theory and C^* - Algebras : A Friendly Approach*. Oxford University Press, 1993.